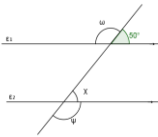


ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Α' ΤΑΞΗΣ

Ενότητα 7: Γεωμετρία II

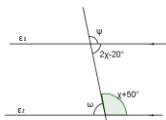
1. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες στα πιο κάτω σχήματα αν $\epsilon_1 // \epsilon_2$.
 Να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας
 α)



α) $x = 50^\circ$ (έντος εκτός επί τα αυτά)
 $x + \psi = 180^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)
 $\Rightarrow 50^\circ + \psi = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow \psi = 180^\circ - 50^\circ$
 $\Leftrightarrow \psi = 130^\circ$

$\omega + 50^\circ = 180^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)
 $\Leftrightarrow \omega = 180^\circ - 50^\circ$
 $\Leftrightarrow \omega = 130^\circ$

β)



α) $x + 50^\circ + 2x - 20^\circ = 180^\circ$ (έντος και επί τα αυτά)
 $\Leftrightarrow x + 2x = 180^\circ + 20^\circ - 50^\circ$
 $\Leftrightarrow 3x = 150^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{150^\circ}{3} \Leftrightarrow x = 50^\circ$

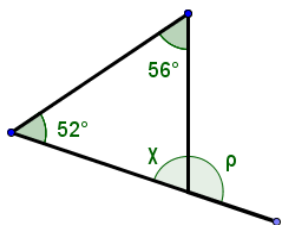
$\omega + x + 50^\circ = 180^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)
 $\Rightarrow \omega + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \omega + 100^\circ = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \omega = 180^\circ - 100^\circ$

$\Leftrightarrow \omega = 80^\circ$

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ και ρ . Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.



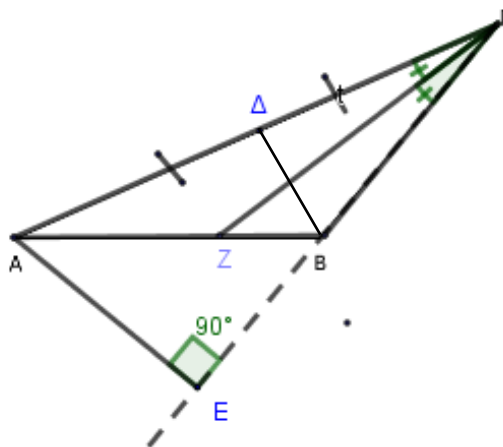
$$\begin{aligned}
 x + 52^\circ + 56^\circ &= 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow x + 108^\circ &= 180^\circ \\
 \Leftrightarrow x &= 180^\circ - 108^\circ \\
 \Leftrightarrow x &= 72^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho &= 52^\circ + 56^\circ \text{ (εξωτερική γωνία τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow \rho &= 108^\circ
 \end{aligned}$$

3. Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να γράψετε τι είναι το $A\Delta$: ύψος, διχοτόμος, διάμεσος

<p>α)</p> <p>$A\Delta$: διάμεσος</p>	<p>β)</p> <p>$A\Delta$: ύψος</p>	<p>γ)</p> <p>$A\Delta$: διχοτόμος</p>
---	---	--

4. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα να κατασκευάσετε τη διάμεσο $B\Delta$, το ύψος AE και τη διχοτόμο ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$.



5. Στο πιο κάτω σχήμα αν AM είναι διάμεσος και ΒΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ να υπολογίσετε την τιμή των χ και ψ.

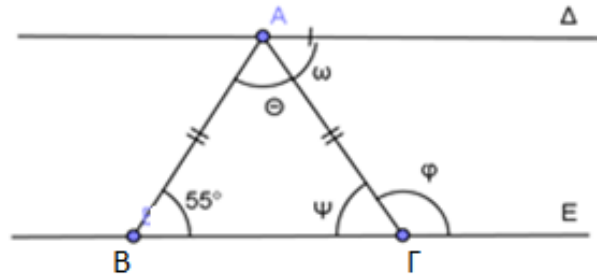


$$\begin{aligned} \psi &= 40^\circ \text{ (ΒΔ διχοτόμος)} \\ 3x + 4 &= 5x - 10 \text{ (ΑΜ διάμεσος)} \\ \Leftrightarrow 3x - 5x &= -4 - 10 \\ \Leftrightarrow -2x &= -14 \\ \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} &= \frac{-14}{-2} \Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

6. Να βρείτε το είδος του τριγώνου σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

	Ως προς τις γωνίες	Ως προς τις πλευρές
<p>Α) Οι δυο γωνίες είναι 60° και 60°.</p> $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$	Οξυγώνιο	Ισόπλευρο
<p>Β) Οι δυο γωνίες του είναι 36° και 54°.</p> $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (36^\circ + 54^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$	Ορθογώνιο	Σκαληνό
<p>Γ) Οι δύο εξωτερικές γωνίες του είναι 135° η κάθε μια.</p> $\hat{A} = 180^\circ - \widehat{A\epsilon\xi} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ $\hat{B} = 180^\circ - \widehat{B\epsilon\xi} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$	Ορθογώνιο	Ισοσκελές
<p>Δ) Οι δύο γωνίες 40° και 100°.</p> $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 140^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$	Αμβλυγώνιο	Ισοσκελές

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται: $AD \parallel BG$, $AB=AG$ και $\widehat{ABG} = 55^\circ$.
 Να υπολογίσετε τις γωνίες ψ , θ , φ , ω . (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



$AB = AG \Rightarrow ABG$ ισοσκελές τρίγωνο

$\psi = 55^\circ$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)

$\theta + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$$\Leftrightarrow \theta + 110^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = 180^\circ - 110^\circ$$

$$\Leftrightarrow \theta = 70^\circ$$

$\psi = \omega = 55^\circ$ (εντός εναλλάξ)

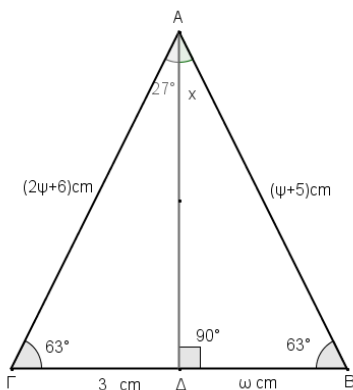
$\varphi + \psi = 180^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)

$$\Rightarrow \varphi + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 180^\circ - 55^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 125^\circ$$

8. Δίνεται τρίγωνο ABG . Να υπολογίσετε την τιμή των χ , ψ και ω .
 Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$\widehat{G} = \widehat{B} \Rightarrow ABG$ ισοσκελές τρίγωνο

$2\psi + 6 = \psi + 5$ (ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου)

$$\Leftrightarrow 2\psi - \psi = 5 - 6$$

$$\Leftrightarrow \psi = -1$$

$\widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD$ ύψος που φέρουμε προς

τη βάση ισοσκελούς τριγώνου

άρα είναι διχοτόμος και διάμεσος

$$x = 27^\circ \text{ (} AD \text{ διχοτόμος)}$$

$$\omega = 3 \text{ cm (} AD \text{ διάμεσος)}$$

9. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Η BZ είναι η διχοτόμος της γωνίας ABX . Να υπολογίσετε τις γωνίες β , γ και δ .

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = x \text{ (BZ διχοτόμος)}$$

$$A\hat{B}X = \Psi\hat{A}B \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\Rightarrow 2x = 56^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{56^\circ}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 28^\circ$$

$$\hat{B}_2 = \beta = 28^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

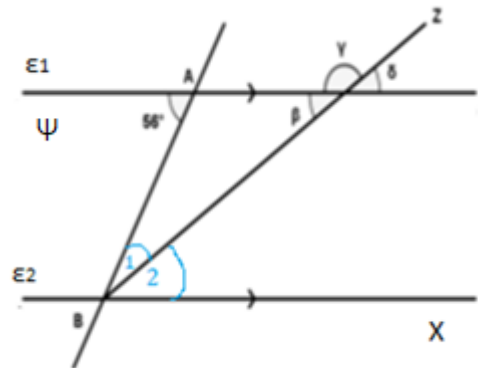
$$\beta = \delta = 28^\circ \text{ (κατακορυφήν)}$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ \text{ (παραπληρωματικές γωνίες)}$$

$$\Rightarrow \gamma + 28^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 180^\circ - 28^\circ$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 152^\circ$$

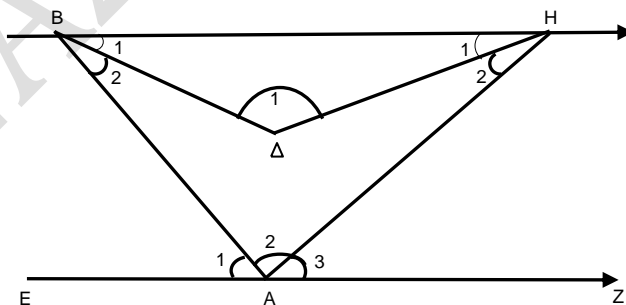


10. Στο πιο κάτω σχήμα έχουμε ότι $BH \parallel EZ$, $\hat{A}_1 = 50^\circ$, $\hat{\Delta}_1 = 135^\circ$, $B\Delta$ διχοτόμος της $A\hat{B}H$ και $H\Delta$ διχοτόμος της $A\hat{H}B$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες \hat{B}_1 , \hat{H}_1 και \hat{A}_3 .

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABH ως προς τις γωνίες του.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = x \text{ (B}\Delta \text{ διχοτόμος)}$$

$$\hat{A}_1 = A\hat{B}H = 2x \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\Rightarrow 2x = 50^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{50^\circ}{2} \Leftrightarrow x = 25^\circ$$

$$\hat{B}_1 + \hat{A}_1 + \hat{H}_1 = 180^\circ \text{ (}\hat{\alpha}\text{θροισμα γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Leftrightarrow 25^\circ + 135^\circ + \hat{H}_1 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 160^\circ + \hat{H}_1 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{H}_1 = 180^\circ - 160^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{H}_1 = 20^\circ$$

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 20^\circ \text{ (}\Delta\text{H διχοτόμος)}$$

$$\hat{A}_3 = \hat{A}\hat{H}B = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\beta) \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ \text{ (ευθεία γωνία)}$$

$$\Leftrightarrow 50^\circ + \hat{A}_2 + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}_2 + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}_2 = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}_2 = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 50^\circ$$

$$\hat{H} = 40^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 90^\circ$$

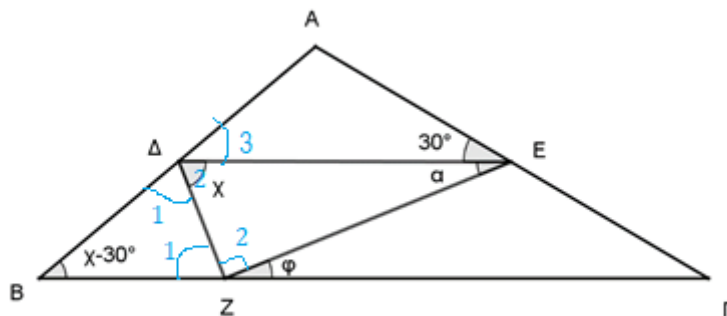
$\left. \begin{matrix} \hat{B} = 50^\circ \\ \hat{H} = 40^\circ \\ \hat{A}_2 = 90^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ABH \text{ ορθογώνιο τρίγωνο γιατί έχει μια ορθή γωνία}$

11. Στο πιο κάτω τρίγωνο ABΓ, δίνονται ΔΕ // ΒΓ, ΔΖ διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ, ΔΕΑ = 30° και ΔΖ ⊥ ΖΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες χ, φ, α, ΒΑΓ και ΒΓΑ.

β) Να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου ΒΔΖ ως προς τις πλευρές του και τις γωνίες του.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\alpha) \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = x \text{ (}\Delta\text{Z διχοτόμος)}$$

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = x \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$x - 30^\circ + x + x = 180^\circ \text{ (}\hat{\alpha}\text{θροισμα γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Leftrightarrow x + x + x = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{210^\circ}{3} \Leftrightarrow x = 70^\circ$$

$$\hat{Z}_2 = 90^\circ \quad (\Delta Z \perp ZE)$$

$$x + 90^\circ + \hat{a} = 180^\circ \quad (\acute{\alpha}\theta\rho\omicron\iota\sigma\mu\alpha \ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu \ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\nu)$$

$$\Leftrightarrow 70^\circ + 90^\circ + \hat{a} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 160^\circ + \hat{a} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} = 180^\circ - 160^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} = 20^\circ$$

$$\hat{\varphi} = \hat{a} = 20^\circ \quad (\epsilon\nu\tau\acute{\omicron}\varsigma \ \epsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi)$$

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^\circ \quad (\epsilon\nu\theta\epsilon\iota\alpha \ \gamma\omega\nu\iota\acute{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow 70^\circ + 70^\circ + \hat{\Delta}_3 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 140^\circ + \hat{\Delta}_3 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}_3 = 180^\circ - 140^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Delta}_3 = 40^\circ$$

$$\text{Στο τρίγωνο } \Delta AE: \hat{\Delta} + \hat{A} + \hat{E} = 180^\circ \quad (\acute{\alpha}\theta\rho\omicron\iota\sigma\mu\alpha \ \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu \ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\nu)$$

$$\Rightarrow 40^\circ + \hat{A} + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 70^\circ + \hat{A} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} = 110^\circ \Rightarrow \widehat{B\hat{A}\Gamma} = 110^\circ$$

$$\widehat{B\hat{\Gamma}A} = \widehat{\Delta\hat{E}A} = 30^\circ \quad (\epsilon\nu\tau\acute{\omicron}\varsigma \ \epsilon\kappa\tau\acute{\omicron}\varsigma \ \kappa\alpha\iota \ \epsilon\pi\acute{\iota} \ \tau\alpha \ \alpha\nu\tau\acute{\alpha})$$

$$\beta) \hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1 = 70^\circ$$

$$\hat{B} = x - 30^\circ = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$$

\Rightarrow το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι οξυγώνιο γιατί έχει τρεις οξείες γωνίες

το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο ίσες γωνίες άρα και δύο ίσες πλευρές