ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2024-2025

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από έξι (6) ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες.
Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Α1. Δίνονται οι πιο κάτω αριθμοί:

$$-2, \qquad 0, \qquad \frac{1}{2}, \qquad -24, \qquad +2$$

Από τους πιο πάνω αριθμούς να επιλέξετε:

(α) Τον μεγαλύτερο αριθμό. __________

(β) Τον αριθμό που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. __________

(γ) Τον αριθμό που είναι αντίστροφος του $+2$. __________

(δ) Δύο ετερόσημους αριθμούς ώστε να ισχύει ότι $\alpha + \beta = 0$. ________ , ________

Λύση:

(α) $+2$

(β) -24

(γ) $\frac{1}{2}$

(δ) $-2, +2$

Α2. Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $(+7) + (+11) =$

(β) $(+9) - (+5) =$

(γ) $(+3) \cdot (-10) =$

(δ) $(-45) \div (-5) =$

Λύση:

(α) $(+7) + (+11) = 7 + 11 = +18$

(β) $(+9) - (+5) = 9 - 5 = 4$

(γ) $(+3) \cdot (-10) = -30$

(δ) $(-45) \div (-5) = 9$

Α3. **(α)** Δίνονται οι όροι εφεξής γωνίες, συμπληρωματικές γωνίες, παραπληρωματικές γωνίες και κατακορυφήν γωνίες. Για κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν να επιλέξετε τον κατάλληλο όρο:

(i) Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180^0 ονομάζονται:

____

(ii) Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο ονομάζονται:

____

(iii) Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες ονομάζονται:

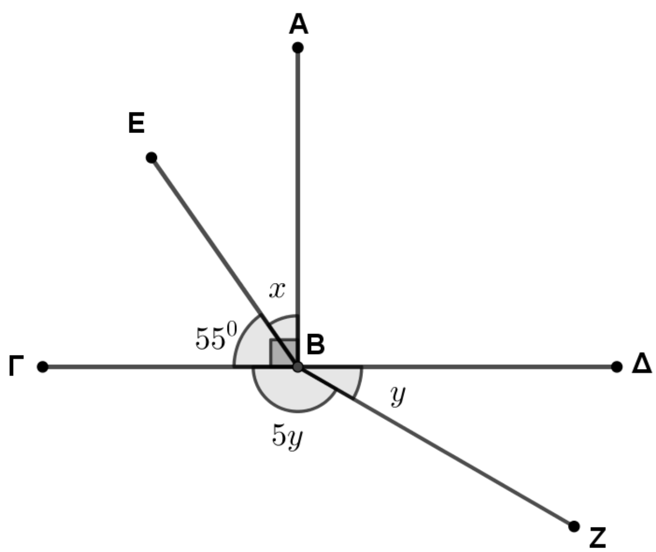
____

(iv) Δύο γωνίες με άθροισμα 90^0 ονομάζονται:

____

(4 μονάδες)

(β) Στο πιο κάτω σχήμα η $AB \perp \Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε την τιμή των x και y, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



(6 μονάδες)

Λύση:

(α) **(i)** παραπληρωματικές γωνίες

(ii) εφεξής γωνίες

(iii) κατακορυφήν γωνίες

(iv) συμπληρωματικές γωνίες

(β) Α’ Τρόπος

$\hat{x} + 55° = 90°$

(Ορθή γωνία ή συμπληρωματικές γωνίες)

$\Leftrightarrow \hat{x} = 90° - 55°$

$\Leftrightarrow \hat{x} = 35°$

$5\hat{y} + \hat{y} = 180°$

(Παραπληρωματικές γωνίες ή ευθεία γωνία)

$\Leftrightarrow 6\hat{y} = 180°$

$\Leftrightarrow \hat{y} = 30°$

Β’ Τρόπος

$\hat{x} + 55° + 90° = 180°$

(ευθεία γωνία)

$\Leftrightarrow \hat{x} = 180° - 55° - 90°$

$\Leftrightarrow \hat{x} = 180° - 145° = 35°$

$180° + 5\hat{y} + \hat{y} = 360°$

(πλήρης γωνία)

$\Leftrightarrow 6\hat{y} = 180°$

$\Leftrightarrow \hat{y} = 30°$

A4. **(α)** Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση σε κάθε μία από τις πιο κάτω προτάσεις:

(i) Ποιος από τους πιο κάτω αριθμούς έχει τους περισσότερους διαιρέτες:

Α. 12 ***Β.*** 16 ***Γ.*** 21 ***Δ.*** 31

(ii) Ποιος από τους πιο κάτω αριθμούς **<u>δεν</u>** είναι πρώτος αριθμός:

Α. 11 ***Β.*** 13 ***Γ.*** 17 ***Δ.*** 21

(iii) Ποιο ψηφίο λείπει από τον τετραψήφιο αριθμό $4\_\_45$, αν γνωρίζουμε ότι διαιρείται με το 9;

Α. 3 ***Β.*** 4 ***Γ.*** 5 ***Δ.*** 6

(iv) Ο αριθμός 2352 διαιρείται με:

Α. το 2 και το 5 ***Β.*** το 9 ***Γ.*** το 2 και το 3 ***Δ.*** 25

(4 μονάδες)

(β)(i) Να αναλύσετε τους αριθμούς 54 και 90 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(4 μονάδες)

(ii) Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ.(54, 90) και το Ε.Κ.Π.[54, 90].

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) (i) $\boldsymbol{A}.12$

(ii) $\boldsymbol{\Delta}.21$

(iii) $\boldsymbol{\Gamma}.5$

(iv) $\boldsymbol{\Gamma}.\tau o\ 2\ \kappa\alpha\iota\ 3$

(β)

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$54 = 2 \cdot 3^3$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

(ii) Μ.Κ.Δ.(54, 90) $= 2 \cdot 3^2$ ή 18

Ε.Κ.Π.[54, 90] $= 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ ή 270

Α5. **(α)** Σε μία αγορά πωλούνται φρούτα και λαχανικά. Η αναλογία των κιλών των φρούτων προς τα κιλά των λαχανικών είναι 5 : 7. Την Τρίτη, πώλησε 60 κιλά φρούτα.

(i) Να βρείτε πόσα κιλά λαχανικών πώλησε την Τρίτη.

(2 μονάδες)

(ii) Η ποσότητα των φρούτων που πωλήθηκε την Τετάρτη ήταν 20% περισσότερη από την ποσότητα που πωλήθηκε την Τρίτη. Να βρείτε την ποσότητα των φρούτων που πωλήθηκε την Τετάρτη.

(4 μονάδες)

(β) Τα μήλα πωλούνται προς €1,20 το κιλό. Να βρείτε πόσα θα πληρώσει ένας πελάτης αν αγοράσει 4 κιλά μήλα και ο υπεύθυνος της αγοράς του δώσει έκπτωση 10%.

(4 μονάδες)

Λύση:

(α) (i) Φρούτα : Λαχανικά

$5 : 7$

$60 : x$

$\frac{5}{7} = \frac{60}{x}$

$\Leftrightarrow 5x = 420$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{420}{5}$

$\Leftrightarrow x = 84 \ \text{κιλά}$

(ii) Α΄ Τρόπος:

Αρχική	Τελική	Αύξηση
100	120	20
60		x

$\frac{100}{60} = \frac{20}{x}$

$\Leftrightarrow 100x = 20 \cdot 60$

$\Leftrightarrow 100x = 1200$

$\Leftrightarrow x = 12$

Άρα $60 + 12 = 72$ κιλά.

Την Τετάρτη πώλησε συνολικά 72 κιλά.

Β΄ Τρόπος

$\frac{20}{100} \times 60 = 12$

Άρα $60 + 12 = 72$ κιλά.

Την Τετάρτη πώλησε συνολικά 72 κιλά.

(β) Α΄ Τρόπος

$€1{,}20 \times 4 = €4{,}80$

Αξία	Πώληση	Έκπτωση
100	90	10
€4,80		x

$\frac{100}{4{,}80} = \frac{10}{x}$

$\Leftrightarrow 100x = 48{,}00$

$\Leftrightarrow 100x = 10 \cdot 4{,}80$

$\Leftrightarrow x = 0{,}48$

Άρα $€4{,}80 - €0{,}48 = €4{,}32$

Ο πελάτης θα πληρώσει $€4{,}32$.

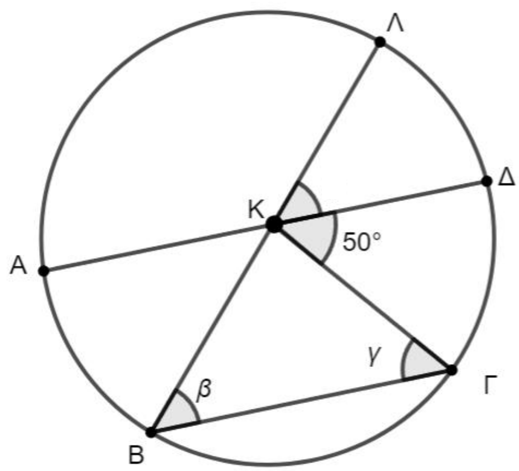
Β΄ Τρόπος

$€1{,}20 \times 4 = €4{,}80$

$\frac{90}{100} \times 4{,}80 = 4{,}32$

Ο πελάτης θα πληρώσει $€4{,}32$.

Α6. Δίνεται κύκλος (K, ρ), η ΛB είναι διάμετρος, $A\Delta \,//\, B\Gamma$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta\Lambda}$ είναι ίσο με $100°$.



(α) Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της πρώτης στήλης με ένα μόνο στοιχείο της δεύτερης στήλης.

Ακτίνα
Χορδή
Διάμετρος

ΑΔ
ΚΒ
ΒΓ

(3 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΚΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\widehat{K}\Lambda$.

(3 μονάδες)

(γ) Να βρείτε τις γωνίες β και γ, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(4 μονάδες)

Λύση:

(α)

Ακτίνα
Χορδή
Διάμετρος

ΑΔ
ΚΒ
ΒΓ

(β) $\widehat{ΓΔΛ} = Γ\widehat{Κ}Λ = 100^0$ (Το τόξο έχει μέτρο ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας)

$Λ\widehat{Κ}Δ = 100^0 - 50^0 \;\; = 50^0$

$Λ\widehat{Κ}Δ = Δ\widehat{Κ}Γ = 50^0$

Άρα ΚΔ διχοτόμος της γωνίας $Γ\widehat{Κ}Λ$

(γ) Α΄ τρόπος

$\hat{γ} = 50^{\circ}$

$(εντός\ εναλλάξ\ γωνίες)$

$\hat{β} = \hat{γ} = 50^0$

$(γωνίες\ παρά\ τη\ βάση\ ισοσκελούς\ τριγώνου)$

Β΄ Τρόπος

$\hat{γ} = 50^{\circ}$

$(εντός\ εναλλάξ\ γωνίες)$

$\hat{β} = 50^{\circ}$

$(εντός\ εκτός\ και\ επί\ τα\ αυτά)$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από τρεις (3) ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.
Οι ασκήσεις Β1 και Β2 βαθμολογούνται με δεκαπέντε (15) μονάδες η κάθε μία και η άσκηση Β3 με δέκα (10) μονάδες.

Β1. Μια ομάδα καλαθόσφαιρας **«Τα Λιοντάρια»** έχει 5 βασικούς παίκτες και έναν αναπληρωματικό.

Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει πόσους πόντους έβαλε ο κάθε παίκτης τον τελευταίο μήνα στους αγώνες.

Παίκτες	**Πόντους**
Παίκτης 1	16
Παίκτης 2	
Παίκτης 3	18
Παίκτης 4	20
Παίκτης 5	8
Αναπληρωματικός	

Το σύνολο των πόντων της ομάδας για αυτό τον μήνα ήταν 80.
Ο Παίκτης 2 έβαλε **διπλάσιους** πόντους από τον Αναπληρωματικό.

(α) Να συμπληρώσετε τον πιο πάνω πίνακα με τους πόντους που πήραν ο Παίκτης 2 και ο Αναπληρωματικός. **(**Να δείξετε όλες σας τις πράξεις.)

(4 μονάδες)

(β) Ένας παίκτης από τους βασικούς της ομάδας επιλέγεται τυχαία. Ποια η πιθανότητα αυτός ο παίκτης να έχει βάλει περισσότερους από 18 πόντους;

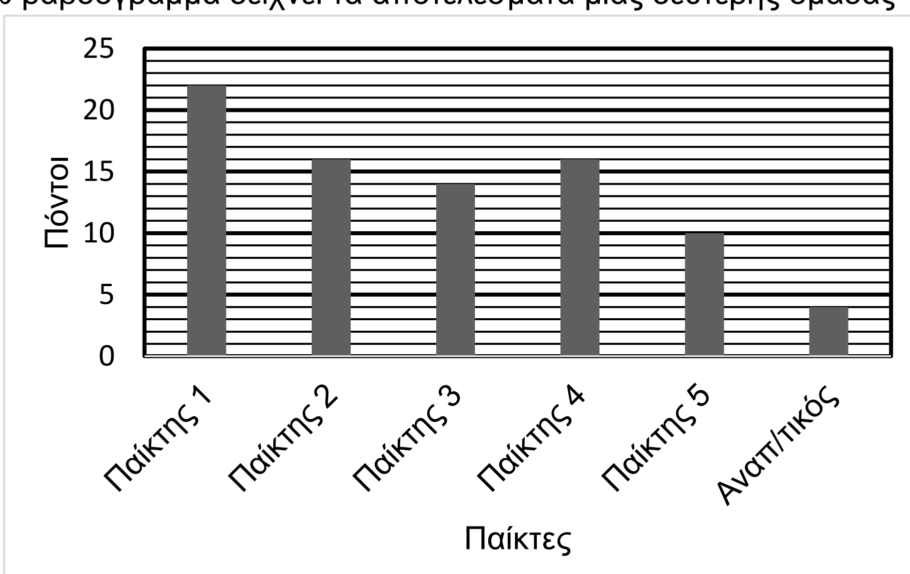
(2 μονάδες)

(γ) Να χαρακτηρίσετε την μεταβλητή **«Παίκτες»** ως προς το είδος της κυκλώνοντας την ορθή απάντησή σας:

Ποιοτική / Ποσοτική

(2 μονάδες)

(δ) Το πιο κάτω ραβδόγραμμα δείχνει τα αποτελέσματα μιας δεύτερης ομάδας **«Η Τίγρης».**



Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

	«Τα Λιοντάρια»	**«Η Τίγρης»**
Παίκτης με τους πιο πολλούς πόντους ανά ομάδα		
Πόσοι παίκτες έχουν βάλει 14 ή περισσότερους πόντους;		

(4 μονάδες)

(ε) Ποια από τις ομάδες «Τα Λιοντάρια» και «Η Τίγρης» έχει καταφέρει να βάλει τους περισσότερους πόντους αυτό το μήνα; **(3 μονάδες)**

Λύση:

(α) Α' τρόπος: (με χρήση εξίσωσης)

Παίκτες	**Πόντους**
Παίκτης 1	16
Παίκτης 2	$2x$
Παίκτης 3	18
Παίκτης 4	20
Παίκτης 5	8
Αναπληρωματικός	x

Πόντοι Παίκτη 2: $2x$

Πόντοι Αναπληρωματικού: x

$16 + 2x + 18 + 20 + 8 + x = 80$

$\Leftrightarrow 62 + 3x = 80$

$\Leftrightarrow 3x = 80 - 62$

$\Leftrightarrow 3x = 18$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{18}{3} = 6$

Πόντοι Παίκτη 2: $2x = 2 \cdot 6 = 12$

Πόντοι Αναπληρωματικού: $x = 6$

Β' τρόπος:

$16 + 18 + 20 + 8 = 62$

$80-62=18$

Αναλογία είναι 1 : 2

Άρα $1+2=3$

$18 \div 3 = 6$

Πόντοι Παίκτη 2: $2 \cdot 6 = 12$

Πόντοι Αναπληρωματικού: 6

(β) A: $\textit{παίκτες που έχουν βάλει περισσότερους από } 18 \textit{ πόντους}$

$\nu(A)=1,\ \nu(\Omega)=5$

$P(A)=\dfrac{\nu(A)}{\nu(\Omega)}=\dfrac{1}{5}$

(γ) Ποιοτική

(δ)

	«Τα Λιοντάρια»	**«Η Τίγρης»**
Παίκτης με τους πιο πολλούς πόντους ανά ομάδα	Παίκτης 4	Παίκτης 1
Πόσοι παίκτες έχουν βάλει 14 ή περισσότερους πόντους;	3	4

(ε) **«**Τα Λιοντάρια» 80 (δεδομένο από άσκηση)

$22+16+14+16+10+4=82$

«Η Τίγρης» 82 (προσθέτει τα ύψη στο ραβδόγραμμα)

Απάντηση: Η ομάδα «Η Τίγρης» έχει καταφέρει να βάλει περισσότερους πόντους αυτό το μήνα

Β2. **(α)(i)** Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x+3}{3}+x=\frac{x-1}{6}$$

(5 μονάδες)

(ii) Αν $x=-1$ είναι η λύση της πιο πάνω εξίσωσης και $y=x^2$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης:

$$A=\frac{3x}{y}+2y^2-|x|$$

(4 μονάδες)

(β) Σε ένα διαγωνισμό τραγουδιού, έλαβαν μέρος ο Δημήτρης, ο Αλκίνοος και η Βασιλική. Ο Δημήτρης πήρε 10 βαθμούς περισσότερους από την Βασιλική, και ο Αλκίνοος πήρε 4 βαθμούς λιγότερους από το διπλάσιο των βαθμών της Βασιλικής. Αν το άθροισμα των βαθμών τους είναι 26, να βρείτε πόσους βαθμούς πήρε ο καθένας. Να λυθεί με εξίσωση.

(6 μονάδες)

Λύση:

(α) (i) $E.K.\Pi. = 6$

$$\overset{2}{\frac{x+3}{3}} + \overset{6}{x} = \overset{1}{\frac{x-1}{6}}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3) + 6x = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 + 6x = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 8x - x = -1 - 6$$

$$\Leftrightarrow 7x = -7$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x}{7} = \frac{-7}{7}$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

(ii) $y = x^2 = (-1)^2 = 1$

$A = \dfrac{3x}{y} + 2y^2 - |x|$

$A = \dfrac{3(-1)}{1} + 2(1)^2 - |-1|$

$A = -3 + 2 - 1$

$A = -2$

(β)

	Δημήτρης	Αλκίνοος	Βασιλική
Βαθμοί	$x+10$	$2x-4$	x

$x + 10 + 2x - 4 + x = 26$

$\Leftrightarrow 4x + 6 = 26$

$\Leftrightarrow 4x = 20$

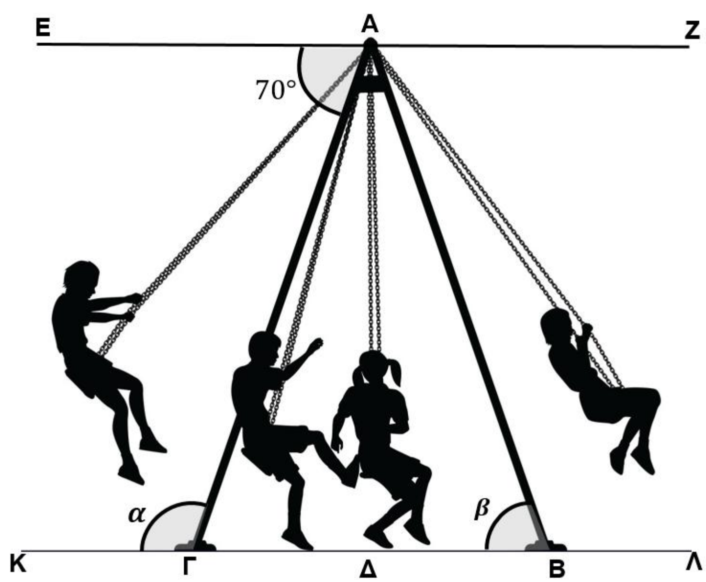
$\Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$

$\Leftrightarrow x = 5$

	Δημήτρης	Αλκίνοος	Βασιλική
Βαθμοί	$x + 10$	$2x - 4$	x
	$5 + 10 = 15$	$2(5) - 4 = 6$	5

Απάντηση: Ο Δημήτρης θα πάρει 15 βαθμούς, ο Αλκίνοος θα πάρει 6 βαθμούς και η Βασιλική θα πάρει 5 βαθμούς.

Β3. Το πιο κάτω σχήμα δείχνει μια κούνια η οποία αποτελείται από δύο ίσους πασσάλους AB και $A\Gamma$. Αυτοί στηρίζουν την κούνια και δημιουργούν μαζί με το έδαφος το τρίγωνο $AB\Gamma$, όπου η γωνία $E\hat{A}\Gamma = 70^{\circ}$, $AB = (6x - 3)$ m και $A\Gamma = (7x - 4)$ m.



(α) Να βρείτε το μήκος του κάθε πασσάλου, χρησιμοποιώντας εξίσωση.

(3 μονάδες)

(β) Αν οι ευθείες EZ και $K\Lambda$ είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις γωνίες α και β, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(5 μονάδες)

(γ) Αν Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$, να βρείτε την γωνία $\Gamma\hat{A}\Delta$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) $AB = A\Gamma\ (\delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu o)$

$6x - 3 = 7x - 4$

$\Leftrightarrow 6x - 7x = -4 + 3$

$\Leftrightarrow -x = -1$

$\Leftrightarrow x = 1$

$AB = 6\,x - 3 = 6(1) - 3 = 3\,m$

(β) Α' τρόπος

$\hat{\alpha} + 70° = 180°$

$\hat{\alpha} = 180° - 70° = 110°$

(εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές)

$A\hat{\Gamma}B = 70°$

(εντός εναλλάξ γωνίες)

$\hat{\beta} = A\hat{B}\Gamma = 70°$

αφού $AB = A\Gamma$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με τις γωνίες παρά τη βάση του να είναι ίσες

Β' τρόπος

$A\hat{\Gamma}B = 70°$

(εντός εναλλάξ γωνίες)

$\hat{\alpha} = 180° - 70° = 110°$

(παραπληρωματικές γωνίες)

$\hat{\beta} = A\hat{B}\Gamma = 70°$

$(αφού\ AB = A\Gamma\ το\ τρίγωνο\ AB\Gamma\ είναι\ ισοσκελές\ με\ τις\ γωνίες\ παρά\ τη\ βάση\ του\ να\ είναι\ ίσες)$

(γ) Α' τρόπος

$\Gamma\hat{A}B = 180° - 70° - 70° = 180° - 140° = 40°$

$(αθροισμα\ γωνιών\ τριγώνου)$

$\Gamma\hat{A}\Delta = 40 : 2 = 20°$

$(AB\Gamma\ ισοσκελές\ τρίγωνο\ τότε\ A\Delta\ είναι\ διάμεσος\ και\ διχοτόμος)$

Β' τρόπος

$A\hat{\Delta}\Gamma = 90°$

$(AB\Gamma\ είναι\ ισοσκελές\ τρίγωνο\ τότε\ A\Delta\ είναι\ διάμεσος,$
$διχοτόμος\ και\ ύψος)$

$70° + 90° + \Gamma\hat{A}\Delta = 180°$

$\Gamma\hat{A}\Delta = 180° - 70° - 90° = 20°$

(άθροισμα γωνιών τριγώνου)