ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024-25

Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 26 ΜΑΪΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΚΩΔΙΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: 2Β

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 90 λεπτά

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ - Α΄ ΣΕΙΡΑ

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>: Αποτελείται από 6 ασκήσεις και βαθμολογείται με 60 μονάδες. Να λύσετε και τις 6 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Α1. Να γράψετε τις παραστάσεις υπό μορφή μιας δύναμης, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

(α) $3^8 \cdot 3^2 = 3^{10}$

(β) $(-5)^{12}:(-5)^4 = (-5)^8$

(γ) $(11^5)^4 = 11^{20}$

(δ) $\frac{14^5}{2^5} = \left(\frac{14}{2}\right)^5 = 7^5$ ή $\frac{14^5}{2^5} = \frac{2^5 \cdot 7^5}{2^5} = 7^5$

(ε) $2^4 \cdot 8 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7$

Α2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $3\mathrm{x} - 3\mathrm{x} = 0$ ή $0\mathrm{x}$

(β) $4\mathrm{xy} - 2\mathrm{xy} + 5 = 2\mathrm{xy} + 5$

(γ) $(2\alpha^2\beta) \cdot (3\alpha\beta) = 6\alpha^3\beta^2$

(δ) $(-15\mathrm{x}^4\mathrm{y}) : (-5\mathrm{x}^5\mathrm{y}) = +3\mathrm{x}^{-1} \cdot \mathrm{y}^0$ ή $3\mathrm{x}^{-1}$ ή $\frac{3}{\mathrm{x}}$

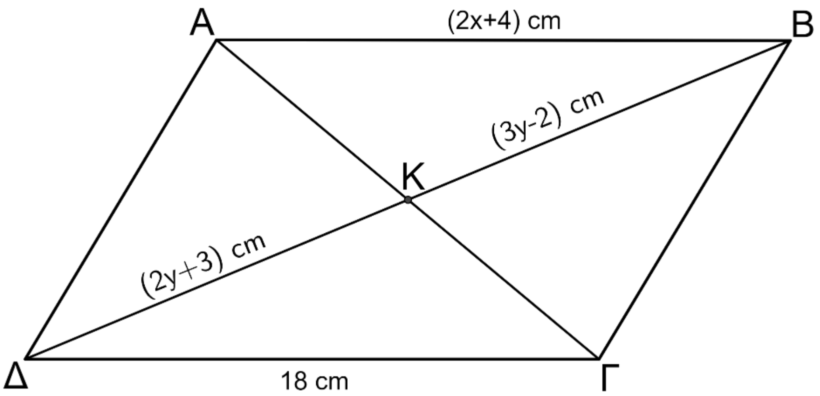
(ε) $(-4\alpha^3)^2 = (-4)^2 \cdot (\alpha^3)^2 = +16\alpha^6$

Α3. (α) Να χαρακτηρίσετε με ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό. (5 μονάδες)

(i) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
(ii) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
(iii) Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ισχύουν και στο ορθογώνιο.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
(iv) Το εμβαδόν κυκλικού τομέα σε κύκλο με ακτίνα R και με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία μ μοιρών είναι: $\mathrm{E}_{\kappa.\tau.} = \frac{\pi \mathrm{R}^2 \mu}{360°}$	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
(v) Το μήκος ενός κύκλου με ακτίνα R είναι: $\Gamma = 2\pi\mathrm{R}$	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) Στο πιο κάτω σχήμα το $\mathrm{ΑΒΓΔ}$ είναι παραλληλόγραμμο με $\mathrm{Κ}$ το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Αν $\mathrm{ΑΒ} = (2x + 4)\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{ΔΓ} = 18\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{ΔΚ} = (2y + 3)\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{ΚΒ} = (3y - 2)\ \mathrm{cm}$, να υπολογίσετε τις τιμές των x και y. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (5 μονάδες)



Το $\mathrm{ΑΒΓΔ}$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα, οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

$$\mathrm{ΑΒ} = \mathrm{ΔΓ} \Longrightarrow 2x + 4 = 18 \Longrightarrow 2x = 18 - 4 \Longrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{14}{2} \Longrightarrow x = 7$$

Το $\mathrm{ΑΒΓΔ}$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

$$\mathrm{ΚΒ} = \mathrm{ΔΚ} \Longrightarrow 3y - 2 = 2y + 3 \Longrightarrow 3y - 2y = 3 + 2 \Longrightarrow y = 5$$

A4. (α) Ένας γεωπόνος φύτεψε σε έναν ανθώνα 7 λουλούδια και κατέγραψε τα ύψη τους σε εκατοστά όπως φαίνεται πιο κάτω:

6, 8, 9, 13, 5,15, 7

(i) Να βρείτε το μέσο ύψος, σε εκατοστά, των λουλουδιών. (3 μονάδες)

$$\bar{x} = \frac{6+8+9+13+5+15+7}{7} = \frac{63}{7} = 9$$

Το μέσο ύψος, σε εκατοστά, των λουλουδιών είναι 9.

(ii) Να βρείτε τη διάμεσο των υψών των λουλουδιών. (3 μονάδες)

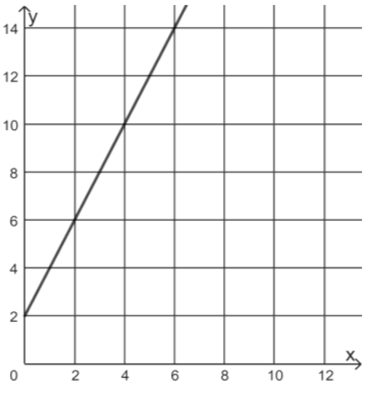
Διατάσσουμε τα ύψη από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.

5, 6, 7, 8, 9, 13, 15

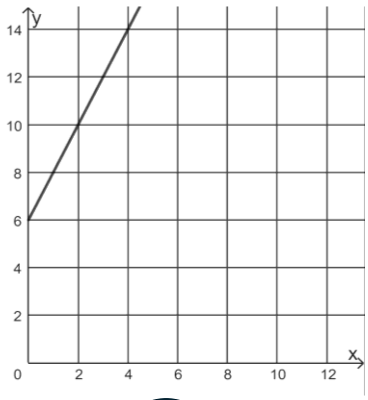
Το πλήθος των υψών είναι περιττός αριθμός (7). Άρα, η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή - παρατήρηση, δηλαδή το 8.

(β) Ο γεωπόνος αποφάσισε να μελετήσει την ανάπτυξη ενός λουλουδιού, με τη βοήθεια γραφικής παράστασης. Παρατήρησε ότι το ύψος y του λουλουδιού (σε εκατοστά) συναρτήσει του χρόνου x (σε εβδομάδες), δίνεται από τη γραμμική συνάρτηση $y = 2x + 6$.

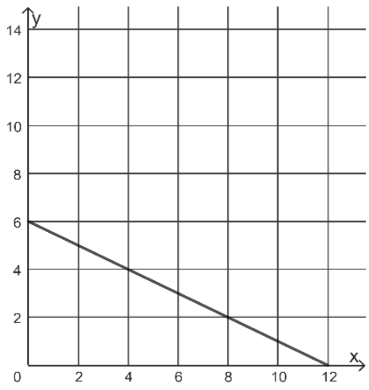
(i) Να επιλέξετε τη γραφική παράσταση που δείχνει την ανάπτυξη του ύψους του λουλουδιού, κυκλώνοντας το αντίστοιχο γράμμα Α ή Β ή Γ. (2 μονάδες)



Α



Β



Γ

(ii) Να υπολογίσετε το ύψος (σε εκατοστά) του λουλουδιού μετά από 4 εβδομάδες.

Για $x = 4 \Rightarrow y = 2 \cdot 4 + 6 \Rightarrow y = 8 + 6 \Rightarrow y = 14$ (2 μονάδες)

Το ύψος του λουλουδιού μετά από 4 εβδομάδες θα είναι 14 εκατοστά.

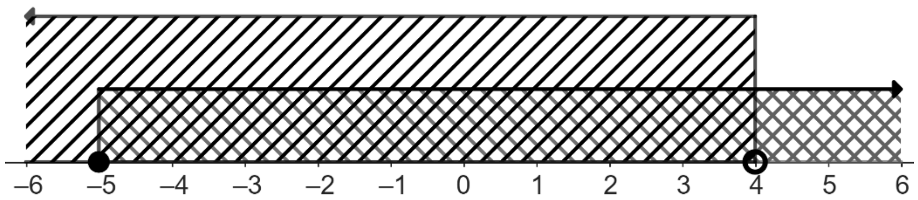
Α5. (α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $2x - 8 < 0$ και $3(x-2) \leq 5x + 4$ (5 μονάδες)

$2x - 8 < 0 \iff 2x < 8 \iff \frac{2x}{2} < \frac{8}{2} \iff x < 4$

$3(x-2) \leq 5x + 4 \iff 3x - 6 \leq 5x + 4 \iff 3x - 5x \leq 4 + 6 \iff -2x \leq 10$

$\iff \frac{-2x}{-2} \geq \frac{10}{-2} \iff x \geq -5$

(β) Να παραστήσετε γραφικά τις κοινές τους λύσεις, στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. (2 μονάδες)

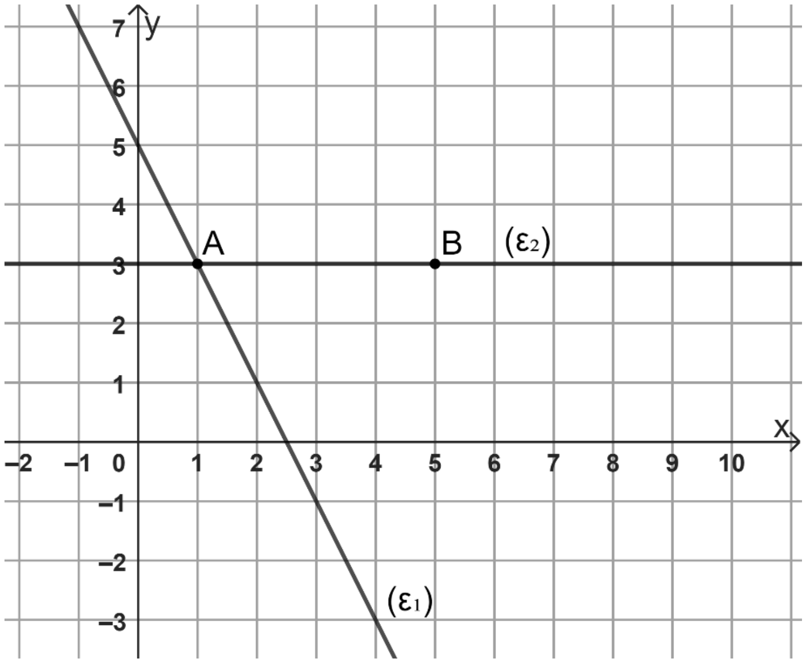


(γ) Να γράψετε τις κοινές τους λύσεις σε μορφή: (3 μονάδες)

(i) ανίσωσης $-5 \leq x < 4$

(ii) διαστήματος $x \in [-5,4)$

Α6. Στο πιο κάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών (ε_1), (ε_2) και το κοινό σημείο τομής τους $\mathrm{A}(1,3)$.



(α) Να βρείτε:

(i) την εξίσωση της ευθείας (ε_1) (3,5 μονάδες)

Η ευθεία έχει εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ και τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0,5).
Άρα, $\beta = 5$.
Η κλίση της ευθείας είναι $\lambda = \alpha$. Από τη γραφική παράσταση υπολογίζουμε τον λόγο της κατακόρυφης προς την οριζόντια μεταβολή $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{0-2} = \frac{4}{-2} = -2$ (ή με τη χρήση του τύπου $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$)
(ή για τον προσδιορισμό των α και β μπορούν να πάρουν και σημεία πάνω στην ευθεία που την επαληθεύουν)

Η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -2x + 5$

(ii) την εξίσωση της ευθείας (ε_2) (1,5 μονάδα)

Είναι της μορφής $y = \beta$ και διέρχεται από το $(0,3)$. Άρα, η ευθεία είναι η $y = 3$.

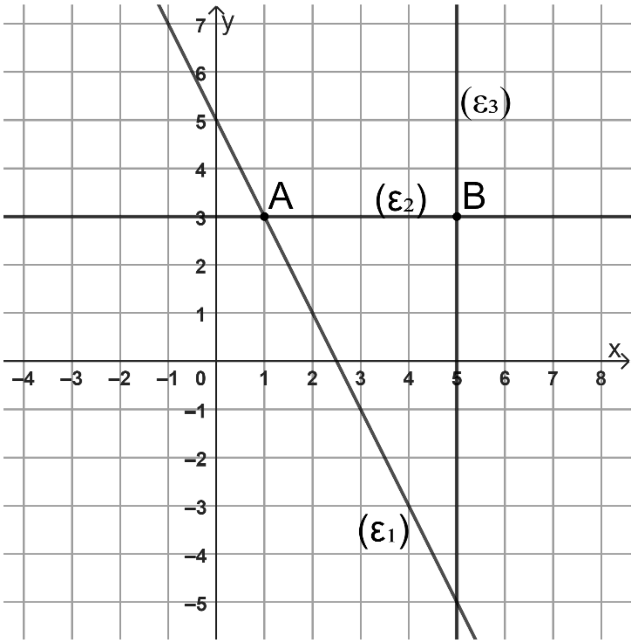
(iii) την κλίση της ευθείας (ε_2) $\lambda = 0$ (1 μονάδα)

(iv) την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων $(0,0)$ και το κοινό σημείο $\mathrm{A}(1,3)$ των ευθειών (ε_1) και (ε_2) (3 μονάδες)

Η εξίσωση περνά από την αρχή των αξόνων. Άρα, $\beta = 0$ και η εξίσωση θα είναι της μορφής $\mathrm{y} = \alpha\mathrm{x}$.
Το σημείο $(1,3)$ επαληθεύει την $\mathrm{y} = \alpha\mathrm{x} \Longrightarrow 3 = \alpha \cdot 1 \Longrightarrow \alpha = 3$
(ή μπορεί να βρεθεί η κλίση με τη χρήση του τύπου $\lambda = \frac{\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1}$)

Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι $\mathrm{y} = 3\mathrm{x}$.

(β) Στο πιο πάνω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας (ε_3) που περνά από το σημείο $\mathrm{B}(5,3)$ και είναι κάθετη στον άξονα των τετμημένων. (1 μονάδα)



ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>: Αποτελείται από 3 ασκήσεις και βαθμολογείται με 40 μονάδες.
Να λύσετε και τις 3 ασκήσεις.
Δυο ασκήσεις βαθμολογούνται με 15 μονάδες η κάθε μία και μία άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. (α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ, να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών $\text{ΑΒ}, \text{ΒΓ}$ και ΑΓ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών και των δυνάμεων (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

$$\text{ΑΒ} = \sqrt{22+\sqrt{2+\sqrt{49}}} = \sqrt{22+\sqrt{2+7}} = \sqrt{22+\sqrt{9}} = \sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5$$

(1,5 μονάδα)

$$\text{ΒΓ} = \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt{8}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{(-10)^2} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} - \sqrt{8\cdot 2} + |-10| = \sqrt[3]{8} - \sqrt{16} + 10$$

$$= 2 - 4 + 10 = 8$$

(3 μονάδες)

$$\text{ΑΓ} = \left(\frac{1}{12}\right)^7 \cdot 12^7 + \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} - 125\cdot 5^{-1} = 12^{-7}\cdot 12^7 + (-6)^2 - 5^3\cdot 5^{-1}$$

(3,5 μονάδες)

$$= 12^0 + 36 - 5^2 = 1 + 36 - 25 = 12$$

ή $\text{ΑΓ} = \frac{1^7}{12^7}\cdot 12^7 + (-6)^2 - 125\cdot\frac{1}{5} = 1^7 + 36 - 25 = 1 + 36 - 25 = 12$

ή $\text{ΑΓ} = \left(\frac{1}{12}\cdot 12\right)^7 + (-6)^2 - 125\cdot\frac{1}{5} = 1^7 + 36 - 25 = 1 + 36 - 25 = 12$

(β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, όταν δίνονται οι πλευρές του, $\text{ΑΒ} = 5\text{ cm}$, $\text{ΒΓ} = 8\text{ cm}$ και $\text{ΑΓ} = 12\text{ cm}$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(2 μονάδες)

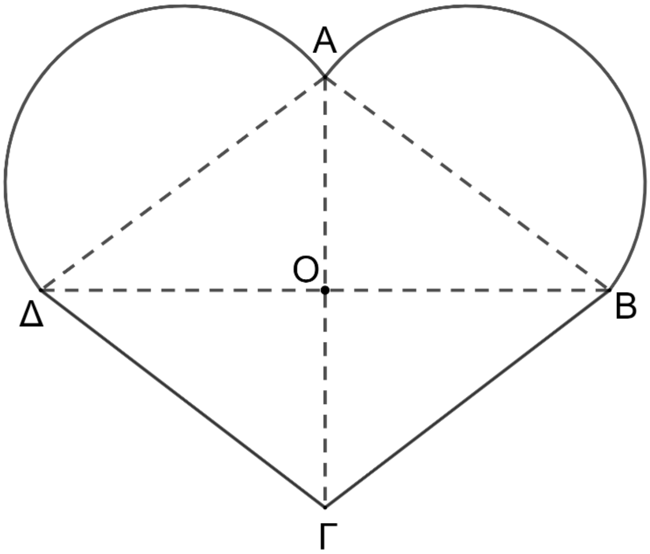
Υπολογίζουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς: $(\text{ΑΓ})^2 = 12^2 = 144$

Υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των δυο μικρότερων πλευρών:

$(\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΒΓ})^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

$(\text{ΑΓ})^2 \neq (\text{ΑΒ})^2 + (\text{ΒΓ})^2$ επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

B2. Οι μαθητές ενός Γυμνασίου σχεδίασαν το πιο κάτω λογότυπο, σε σχήμα καρδίας, ώστε να τυπωθεί σε φανέλες για μια φιλανθρωπική δράση του σχολείου τους. Το λογότυπο αποτελείται από τον ρόμβο $ΑΒΓΔ$ με περίμετρο $40\,\text{cm}$ και δύο ημικύκλια $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΑΔ}$ με διαμέτρους $ΑΒ$ και $ΑΔ$ αντίστοιχα. Το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου και $ΒΔ = 16\ \text{cm}$.



(α) Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου $ΑΒΓΔ$. (5 μονάδες)

$Π = 4α \Longrightarrow 40 = 4α \Longrightarrow α = 10\text{cm}$

Στον ρόμβο:

οι διαγώνιοι διχοτομούνται επομένως $ΟΒ = ΟΔ = 8\text{cm}$

οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα επομένως το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ορθογώνιο

Άρα, ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$(ΑΒ)^2 = (ΑΟ)^2 + (ΟΒ)^2 \Longrightarrow 10^2 = (ΑΟ)^2 + 8^2 \Longrightarrow 100 = (ΑΟ)^2 + 64 \Longrightarrow (ΑΟ)^2 = 100 - 64$$

$$\Longrightarrow (ΑΟ)^2 = 36 \Longrightarrow ΑΟ = \sqrt{36}\,, \text{αφού } ΑΟ > 0 \ \Longrightarrow ΑΟ = 6\text{cm}$$

$\Longrightarrow ΑΓ = 12\text{cm}$ (οι διαγώνιοι διχοτομούνται)

$$Ε_{ΑΒΓΔ} = \frac{δ_1 \cdot δ_2}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96\text{cm}^2$$

(β) Να βρείτε, συναρτήσει του $π$:

(i) το εμβαδόν του ημικυκλίου $\widehat{ΑΒ}$ (3 μονάδες)

$ΑΒ = 10\text{cm} \Longrightarrow R = 5\text{cm}$ $\quad Ε_{ημ} = \frac{πR^2}{2} = \frac{π \cdot 5^2}{2} = \frac{25}{2}π\text{cm}^2$

(ii) το <u>συνολικό εμβαδόν</u> του λογότυπου (3 μονάδες)

$$\mathrm{E}_{\lambda o\gamma \acute{o}\tau \upsilon \pi o \upsilon} = \mathrm{E}_{\rho \acute{o}\mu\beta o\upsilon} + 2 \cdot \mathrm{E}_{\eta\mu} = 96 + 2 \cdot \frac{25}{2}\pi = (96 + 25\pi)\mathrm{cm}^2$$

(iii) την περίμετρο του λογότυπου (4 μονάδες)

$$\Pi_{\lambda o\gamma \acute{o}\tau \upsilon \pi o \upsilon} = \Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{B} + 2 \cdot \Gamma_{\eta\mu} = \Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{B} + 2 \cdot \frac{2\pi \mathrm{R}}{2}$$

$$= 10 + 10 + 2 \cdot \pi \cdot 5 = (20 + 10\pi)\mathrm{cm}$$

Β3. Δίνονται τα πολυώνυμα: $\varphi(x) = x - 3$, $\rho(x) = x^2 - x - 6$ και $\sigma(x) = x + 3$

(α) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

(i) $\rho(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = +4 + 2 - 6 = 0$ (3 μονάδες)

(ii) $3\rho(x) - \varphi(x) \cdot \sigma(x) = 3 \cdot (x^2 - x - 6) - (x - 3) \cdot (x + 3)$ (4 μονάδες)

$= 3x^2 - 3x - 18 - (x^2 + 3x - 3x - 9)$

$= 3x^2 - 3x - 18 - x^2 + 9$

$= 2x^2 - 3x - 9$

(iii) $\rho(x) : \varphi(x)$ (3 μονάδες)

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - x - 6 & \underline{x - 3} \\
\underline{-x^2 + 3x} \quad & x + 2 \\
2x - 6 & \\
\underline{-2x + 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\rho(x) - \varphi(x) = x \cdot \varphi(x) + \sigma(x) - 6$

(5 μονάδες)

Α΄ μέλος: $\rho(x) - \varphi(x) = x^2 - x - 6 - (x - 3) = x^2 - x - 6 - x + 3 = x^2 - 2x - 3$

Β΄ μέλος: $x \cdot \varphi(x) + \sigma(x) - 6 = x \cdot (x - 3) + x + 3 - 6 = x^2 - 3x + x + 3 - 6$

$= x^2 - 2x - 3$

Άρα, $\text{Α΄ μέλος} = \text{Β΄ μέλος} = x^2 - 2x - 3$