

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΧΡΟΝΙΑΣ 2024-2025

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ – Α΄ ΣΕΙΡΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις έξι (6) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

A1 Να κάνετε τις πράξεις:

(α)  $(x - 3)^2 =$

(β)  $(\alpha + 4\beta)(\alpha - 4\beta) =$

Λύση

(α)  $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

(β)  $(\alpha + 4\beta)(\alpha - 4\beta) = \alpha^2 - (4\beta)^2 = \alpha^2 - 16\beta^2$

A2 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α)  $2x^2 + 6x =$

(β)  $25 - y^2 =$

(γ)  $9a^2 - 6a + 1 =$

Λύση

(α)  $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$  (μον.4)

(β)  $25 - y^2 = (5 - y)(5 + y)$  (μον.3)

(γ)  $9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2$  (μον.3)

A3 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α)  $\frac{4\alpha\beta^3}{6\alpha^4\beta^2} =$  (μον.4)

(β)  $\frac{x^2-9}{x^3+27} =$  (μον.6)

### Λύση

$$(α) \frac{4αβ^3}{6α^4β^2} = \frac{2β}{3α^3}$$

$$(β) \frac{x^2-9}{x^3+27} = \frac{x^2-3^2}{x^3+3^3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+3^2)} = \frac{x-3}{x^2-3x+9}$$

**A4** Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων:

$$3x + 5y = 4$$

$$2x - 3y = 9$$

### Λύση

$$\begin{array}{l} 3x + 5y = 4 \quad | \cdot 3 \\ 2x - 3y = 9 \quad | \cdot 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 9x + 15y = 12 \\ 10x - 15y = 45 \end{array} +$$

$$19x = 57 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 3 - 3y = 9$$

$$\Rightarrow 6 - 9 = 3y \Rightarrow y = -1$$

Επομένως η λύση του συστήματος είναι:  $(3, -1)$

**A5** Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση  $A$  είναι σταθερή.

$$A = \frac{10x^2 - 40x + 30}{x^3 - 6x^2 + 9x} \div \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x-3} \right)$$

### Λύση

$$A = \frac{10(x^2 - 4x + 3)}{x(x^2 - 6x + 9)} \div \left[ \frac{x-3+2x}{x(x-3)} \right] = \frac{10(x-3)(x-1)}{x(x-3)^2} \div \left[ \frac{3(x-1)}{x(x-3)} \right]$$

$$= \frac{10(x-3)(x-1)}{x(x-3)^2} \cdot \frac{x(x-3)}{3(x-1)} = \frac{10}{3}$$

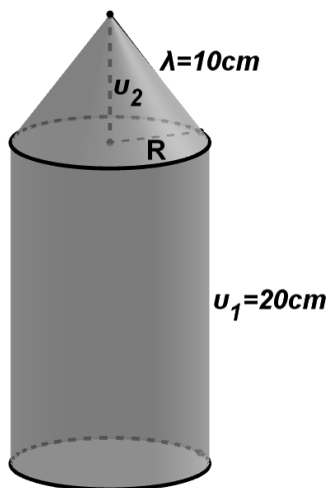
Άρα η παράσταση  $A$  είναι σταθερή.

**A6** Το πιο κάτω στερεό κατασκευάστηκε ενώνοντας ένα κώνο στο πάνω μέρος ενός κυλίνδρου. Το ύψος του κυλίνδρου ( $v_1$ ) είναι  $20\text{ cm}$ . Η γενέτειρα ( $\lambda$ ) του κώνου έχει μήκος  $10\text{ cm}$  και το ύψος του ( $v_2$ ) είναι κατά  $2\text{ cm}$  μεγαλύτερο από την ακτίνα της βάσης του. Ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης  $R$ .

(α) Να αποδείξετε ότι  $R = 6\text{ cm}$ . (μον.3)

(β) Να υπολογίσετε τον συνολικό όγκο του στερεού (η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του  $\pi$ ). (μον.3)

(γ) Το στερεό θα βαφεί εξωτερικά με υλικό που κοστίζει  $\text{€ } 0,1/\text{cm}^2$ . Να υπολογίσετε το κόστος της βαφής του στερεού (το  $\pi$  να αντικατασταθεί με  $3,14$ ). (μον.4)



### Λύση

(α) Θέτω  $R = x$  και  $v_2 = x + 2$

$$\text{Π.Θ.: } \lambda^2 = v_2^2 + R^2$$

$$\Rightarrow 10^2 = (x + 2)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 100 = x^2 + 4x + 4 + x^2$$

$$\Rightarrow 100 = 2x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + 2x - 48) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x - 6)(x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ δεκτή, } x = -8 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\Rightarrow R = 6\text{ cm}$$

$$(β) V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi R^2 v_1 = \pi \cdot 6^2 \cdot 20 = 720\pi \text{ cm}^3$$

$$v_2 = 6 + 2 = 8 \text{ cm}$$

$$V_{\text{κώνου}} = \frac{\pi R^2 v_2}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 96\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{στερεού}} = 720\pi + 96\pi = 816\pi \text{ cm}^3$$

$$(γ) E_{\text{κυρτής κώνου}} = \pi R \lambda$$

$$\Rightarrow E_{\text{κυρτής κώνου}} = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} = 2\pi R v_1$$

$$\Rightarrow E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 20 = 240\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} = \pi R^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{στερεού}} = 60\pi + 240\pi + 36\pi = 336\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Κόστος Βαφής: } 336 \cdot 3,14 \cdot 0,1 = \text{€}105,50$$

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις τρεις (3) ασκήσεις.**

**Η άσκηση Β1 βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες και οι ασκήσεις Β2 και Β3 με δεκαπέντε (15) μονάδες η κάθε μία.**

**Β1** Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) 3x^2 - 13x - 10 = 0 \quad (\text{μον.4})$$

$$(β) \frac{x-4}{x+2} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (\text{μον.6})$$

### Λύση

$$(α) x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{169 + 120}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{13 \pm 17}{6}$$

$$x_1 = \frac{13+17}{6} = \frac{30}{6} = 5, \quad x_2 = \frac{13-17}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$(β) \frac{x-4}{x+2} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$$

$$E.K.Π = (x+2)(x-1)$$

$$x \neq -2, \quad x \neq 1$$

$$(x-4)(x-1) + (x+2) = 3$$

$$x^2 - x - 4x + 4 + x + 2 = 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3$$

$$x = 1$$

Δεκτή

Απορρίπτεται

**B2** Δίνονται τα σημεία  $A(-4, -1)$ ,  $B(-2, -2)$ ,  $\Gamma(0,2)$  και  $\Delta(-2,3)$ .

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. **(μον.5)**

(β) Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος ενώ η Μαρία ισχυρίζεται ότι είναι ορθογώνιο. Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του καθενός δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. **(μον.6)**

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη με την ευθεία  $y + 2x = 7$ .

**(μον.4)**

### Λύση

$$\begin{aligned}(\alpha) (AB) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(-4 + 2)^2 + (-1 + 2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$(BG) = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$(GD) = \sqrt{(0 + 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$(AD) = \sqrt{(-4 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Το  $ABGD$  είναι παραλληλόγραμμο διότι έχει τις απέναντι του πλευρές ίσες.

$$(\beta) \lambda_{AB} = \frac{-2+1}{-2+4} = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_{AD} = \frac{3+1}{-2+4} = 2$$

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{AD} = -1 \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$

Το  $ABGD$  είναι ορθογώνιο διότι είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.

$$(AB) = \sqrt{(-4 + 2)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$(BG) = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Το  $ABGD$  δεν είναι ρόμβος διότι δύο πλευρές του δεν ισούνται.

Άρα δίκαιο έχει μόνο η Μαρία.

$$(\gamma) y + 2x = 7 \Rightarrow y = -2x + 7 \Rightarrow \lambda = -2$$

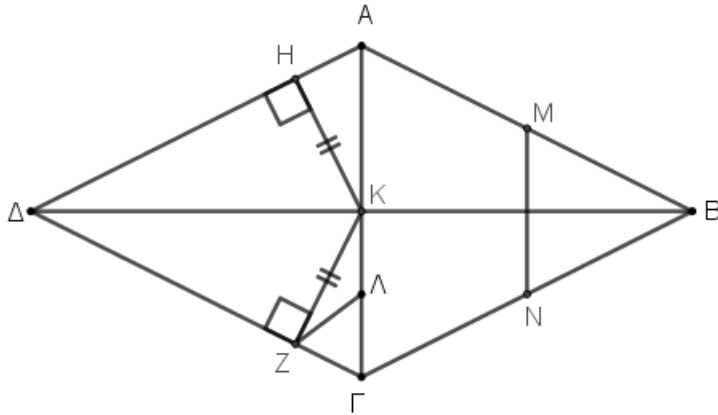
$$y = -2x + \beta$$

$$-1 = -2(-4) + \beta$$

$$-1 = 8 + \beta \Rightarrow \beta = -9$$

$$y = -2x - 9$$

- B3** Στο πιο κάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. Το κέντρο  $K$  του παραλληλογράμμου ισαπέχει από τις πλευρές  $AD$  και  $\Gamma\Delta$ .
- (α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Delta HK$  και  $\Delta ZK$  είναι ίσα. (μον.6)
- (β) Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος. (μον.4)
- (γ) Αν  $M$ ,  $N$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $K\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $(MN) = 2(Z\Lambda)$ . (μον.5)



### Λύση

(α) Συγκρίνω τα τρίγωνα  $\Delta HK$  και  $\Delta ZK$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad HK = ZK \text{ (Δεδομένο)} \\ (2) \quad \angle \Delta HK = \angle \Delta ZK = 90^\circ \\ (3) \quad \Delta K \text{ Κοινή πλευρά} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta HK = \Delta ZK \text{ (Π - Π - Ο)}$$

(β)  $\angle H\Delta K = \angle Z\Delta K$  (αντίστοιχα στοιχεία ίσα)

Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος διότι είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιος του διχοτομεί μια γωνία του.

(γ) Στο τρίγωνο  $KZ\Gamma$  η  $Z\Lambda$  είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου, άρα:

$$(Z\Lambda) = \frac{(K\Gamma)}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ μέσο της } AB \\ N \text{ μέσο της } B\Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow (MN) = \frac{(A\Gamma)}{2} \quad (2)$$

$$\frac{(A\Gamma)}{2} = (K\Gamma) \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει:

$$(MN) = (K\Gamma) \quad (4)$$

Από τις (1) και (4) προκύπτει:

$$(MN) = 2(Z\Lambda)$$