

Ενότητα 3: Διαιρετότητα

1. Να βρείτε με τη χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης, τον αριθμό ο οποίος όταν διαιρεθεί με το 15 δίνει πηλίκο 5 και υπόλοιπο 3.

$$\Delta = ; \quad \delta = 15 \quad \pi = 5 \quad \upsilon = 3$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \delta \cdot \pi + \upsilon \\ &= 15 \cdot 5 + 3 \\ &= 75 + 3 \\ &= 78 \end{aligned}$$

2. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των διαιρετών (χωρίς να κάνετε διαίρεση) να εξετάσετε αν αριθμός 16 διαιρεί το άθροισμα $3200+64$

$$\left. \begin{array}{l} 16|3200 = 200 \cdot 16 \\ 16|64 = 4 \cdot 16 \end{array} \right\} 16|3200 + 64$$

(Ιδιότητα: Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους φυσικούς αριθμούς θα διαιρεί και το άθροισμα και τη διαφορά τους.)

3. Να βάλετε σε κύκλο τους πρώτους αριθμούς:

4 , 5 , 9 , 13 , 15 , 23 , 27 , 39 , 43

4 , (5) , 9 , (13) , 15 , (23) , 27 , 39 , (43)

4. Να σημειώσετε σε κάθε τετραγωνάκι το κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός:

α) 67 να διαιρείται με το 5 και το 2

β) 23 να διαιρείται με το 9

γ) 3690 να διαιρείται με το 3 και το 2 .

δ) 4 2 να διαιρείται με το 3 και το 5 και όχι με το 2.

ή

ή

ε) 3 7 να διαιρείται με το 25 και το 3.

ή

ή

ή

5. Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των αριθμών:

α) 18, 27, 45

β) 48, 60, 84

α)

| | | | | | |
|----|---|----|---|----|---|
| 18 | 2 | 27 | 3 | 45 | 3 |
| 9 | 3 | 9 | 3 | 15 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 |
| 1 | | 1 | | 1 | |

$$18 = 2 \cdot 3^2 \quad 27 = 3^3 \quad 45 = 3^2 \cdot 5$$

$$\text{Μ. Κ. Δ}(18, 27, 45) = 3^2 = 9$$

$$\text{Ε. Κ. Π}(18, 27, 45) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2 \cdot 27 \cdot 5 = 270$$

β)

| | | | | | |
|----|---|----|---|----|---|
| 48 | 2 | 60 | 2 | 84 | 2 |
| 24 | 2 | 30 | 2 | 42 | 2 |
| 12 | 2 | 15 | 3 | 21 | 3 |
| 6 | 2 | 5 | 5 | 7 | 7 |
| 3 | 3 | 2 | | 1 | |
| 1 | | | | | |

$$48 = 2^4 \cdot 3 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{Μ. Κ. Δ}(48, 60, 84) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\text{Ε. Κ. Π}(48, 60, 84) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 16 \cdot 15 \cdot 7 = 1680$$

6. Οι μαθητές της Α' Γυμνασίου ενός σχολείου συγκέντρωσαν τα Χριστούγεννα τρόφιμα για να τα μοιράσουν σε άπορες οικογένειες. Κατάφεραν να συγκεντρώσουν 96 πακέτα μακαρόνια, 72 κουτιά γάλα και 48 πακέτα αλεύρι. Να υπολογίσετε:

- α) πόσα το πολύ όμοια δέματα μπορούν να φτιάξουν, χωρίς να περισσέψει κανένα από τα τρόφιμα που συγκέντρωσαν
- β) πόσα πακέτα μακαρόνια, κουτιά γάλα και πακέτα αλεύρι θα περιέχει το κάθε δέμα.

α)

| | | | | | |
|----|---|----|---|----|---|
| 96 | 2 | 72 | 2 | 48 | 2 |
| 48 | 2 | 36 | 2 | 24 | 2 |
| 24 | 2 | 18 | 2 | 12 | 2 |
| 12 | 2 | 9 | 3 | 6 | 2 |
| 6 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | | 1 | |
| 1 | | | | | |

$$96 = 2^5 \cdot 3 \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad 48 = 2^4 \cdot 3$$

$$M. K. \Delta(96, 72, 48) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ δέματα}$$

Απ. Θα φτιάξουν 24 όμοια δέματα

- β) $96 \div 24 = 4$ πακέτα μακαρόνια
 $72 \div 24 = 3$ κουτιά γάλα
 $48 \div 24 = 2$ πακέτα αλεύρι

Απ.: Το κάθε δέμα θα περιέχει 4 πακέτα μακαρόνια, 3 κουτιά γάλα και 2 πακέτα αλεύρι.

7. Τρία ταχύπλοα σκάφη (πλοιάρια) της Λιμενικής Αστυνομίας Κύπρου περιπολούν από διαφορετικές πλευρές την εξέδρα εξόρυξης φυσικού αερίου της Noble ξεκινώντας από το λιμάνι Λεμεσού. Το πρώτο ο Ερμής αναχωρεί από το λιμάνι κάθε 4 ώρες, το δεύτερο ο Ποσειδώνας αναχωρεί κάθε 5 ώρες και το τρίτο ο Διομήδης αναχωρεί κάθε 8 ώρες. Αν ξεκίνησαν μαζί ταυτόχρονα στις 16 Νοεμβρίου η ώρα 10.00 μ.μ. πότε θα ξαναβρεθούν μαζί στο λιμάνι Λεμεσού; (ακριβή ημερομηνία και ώρα)

α)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 5 | 5 | 8 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | | 4 | 2 |
| 1 | | | | 2 | 2 |
| | | | | 1 | |

$$4 = 2^2 \quad 5 = 5 \quad 8 = 2^3$$

$$E. K. \Pi(4, 5, 8) = 2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40 \text{ ώρες}$$

40 ώρες = 24 ώρες + 16 ώρες = 1 μέρα + 16 ώρες

Θα περάσει 1 μέρα και 16 ώρες

10:00 μ.μ 16 Νοεμ. 10:00 μ.μ 17 Νοεμ. 2:00 μ.μ 18 Νοεμ.



Μετά από 1 ημέρα **Μετά από 16 ώρες**
Απ.: Θα ξαναβρεθούν στις 18 Νοεμβρίου στις 2:00 μ.μ.

8. Οι μαθητές ενός σχολείου είναι περισσότεροι από 500 και λιγότεροι από 600. Αν παραταχθούν σε εννιάδες, δεκάδες ή δεκαπεντάδες, περισσεύουν 8. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές του σχολείου;

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 9 & 3 & 10 & 2 & 15 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & & 1 & & 1 & \end{array}$$

$$9 = 3^2 \quad 10 = 2 \cdot 5 \quad 15 = 3 \cdot 5$$

$$\text{Ε. Κ. Π}(9, 10, 15) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$$

Ο αριθμός που αναζητώ είναι πολλαπλάσιο του 90 (άρα και του 9, 10 και 15).

$$\Pi_{90} = \{ 90, 180, 270, 360, 450, 540, 630, \dots \}$$

$$\text{Αριθμός μαθητών} = 540 + 8 = 548$$

↓
Οι μαθητές που περισσεύουν

Απ.: Οι μαθητές είναι 548.

Ενότητα 4: Ακέραιοι-Ρητοί Αριθμοί

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(+4) + (-19) = -15$

β) $-18 + 5 - 6 = -24 + 5 = -19$

γ) $(-17) - (+9) = (-17) + (-19) = -36$

δ) $(-7) \cdot (+5) = -35$

ε) $(-36) \div (-6) = +6$

στ) $(-1) \cdot (-4) \cdot (-5) = -20$

ζ) $+1\frac{5}{8} - 1\frac{3}{4} = +1\frac{5}{8} - 1\frac{6}{8} = -\frac{1}{8}$ ή $1\frac{5}{8} - 1\frac{3}{4} = +\frac{13}{8} - \frac{7}{4} = +\frac{13}{8} - \frac{14}{8} = -\frac{1}{8}$

η) $-\frac{5}{4} - \frac{4}{5} = -\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = -\frac{23}{20} = -1\frac{3}{20}$

θ) $-2\frac{2}{5} + (-1\frac{1}{2}) - \frac{3}{10} = -2\frac{2}{10} + (-1\frac{5}{10}) - \frac{3}{10} = -3\frac{10}{10} = -4$

ι) $\frac{7}{9} \cdot (-\frac{3}{5}) = -\frac{7 \cdot 3}{9 \cdot 5} = -\frac{21}{45} = -\frac{7}{15}$

κ) $(-1\frac{2}{5}) \div (-3\frac{1}{2}) = (-\frac{7}{5}) \div (-\frac{7}{2}) = (-\frac{7}{5}) \cdot (-\frac{2}{7}) = +\frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 7} = +\frac{2}{5}$

λ) $(+5) - (-3) + (-2) - (+5) = +5 + 3 - 2 - 5 = +8 - 7 = +1$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) τις παρακάτω προτάσεις βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

| | |
|---|--|
| i. Το πηλίκο δύο αντίθετων αριθμών είναι ίσο με -1 . | <input checked="" type="radio"/> Σ / <input type="radio"/> Λ |
| ii. Το γινόμενο $(-435) \cdot (-503) \cdot (+274) \cdot (-172) \cdot (-12) \cdot (-94)$ είναι θετικό. | Σ / <input checked="" type="radio"/> Λ |
| iii. Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι μεγαλύτερη από το μηδέν. | <input checked="" type="radio"/> Σ / <input type="radio"/> Λ |
| iv. Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι ίσο με μηδέν. | <input checked="" type="radio"/> Σ / <input type="radio"/> Λ |

3. Αν για τους ρητούς αριθμούς α και β ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις, να γράψετε τα συμπεράσματά σας για αυτούς:

α) Αν ισχύει $\alpha + \beta = 0$, τότε οι αριθμοί α και β είναι **αντίθετοι**

β) Αν ισχύει $\alpha \cdot \beta = +1$, τότε οι αριθμοί α και β είναι **αντίστροφοι**

γ) Αν ισχύει $-\alpha \cdot \beta < 0$, τότε οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**

δ) Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} < 0$, τότε οι αριθμοί α και β είναι **ετερόσημοι**

ε) Αν ισχύει $\alpha + \beta = \beta$, τότε $\alpha = 0$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $2^3 = 8$

β) $6^0 = 1$

γ) $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$

δ) $0^4 = 0$

ε) $(-4)^2 = +16$

στ) $(-3)^3 = -27$

ζ) $-(-6)^2 = -(+36) = -36$

η) $(5 - 6)^{12} = (-1)^{12} = +1$

5. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\begin{aligned} \alpha) (-2)^3 - (+1)^3 - 7^0 &= (-8) - (+1) - 1 \\ &= -8 - 1 - 1 \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) (-1)^5 - 2 \cdot (5 - 1)^2 &= (-1)^5 - 2 \cdot 4^2 \\ &= (-1) - 2 \cdot 16 \\ &= -1 - 32 \\ &= -33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) 6^2 - 3 \cdot 2^5 + 10^2 \div 5 &= 36 - 3 \cdot 32 + 100 \div 5 \\ &= 36 - 96 + 20 \\ &= 56 - 96 \\ &= -40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) (2^3 - 3) \div (-5) + (3 - 5)^2 &= (8 - 3) \div (-5) + (-2)^2 \\ &= (+5) \div (-5) + (+4) \\ &= -1 + (+4) \\ &= +3 \end{aligned}$$

6. Αν $\alpha = +6$, $\beta = -3$ και $\gamma = -4$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$$\begin{aligned} \text{i) } 5 - \alpha + \beta &= 5 - (+6) + (-3) \\ &= 5 - 6 - 3 \\ &= 5 - 9 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \alpha \div \beta - \beta \cdot \gamma &= (+6) \div (-3) - (-3) \cdot (-4) \\
 &= (-2) - (+12) \\
 &= -2 - 12 \\
 &= -14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } 2 \cdot (\alpha - \beta) - \gamma - 3 &= 2 \cdot [(+6) - (-3)] - (-4) - 3 \\
 &= 2 \cdot (+6 + 3) - (-4) - 3 \\
 &= 2 \cdot (+9) - (-4) - 3 \\
 &= +18 - (-4) - 3 \\
 &= 18 + 4 - 3 \\
 &= 22 - 3 \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } \frac{\beta \cdot \gamma - \beta}{\alpha^2 : \gamma} &= \frac{(-3) \cdot (-4) - (-3)}{(+6)^2 : (-4)} \\
 &= \frac{(+12) - (-3)}{(+36) : (-4)} \\
 &= \frac{+12 + 3}{-9} \\
 &= \frac{+15}{-9} \\
 &= -1\frac{6}{9} = -1\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

7. Να κάνετε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{\frac{2}{3}}{-5\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \div \left(-5\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \div \left(-\frac{21}{4}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{21}\right) = -\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 21} = -\frac{8}{63}$$

ή

$$\frac{\frac{2}{3}}{-5\frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{21}{4}} = -\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 21} = -\frac{8}{63}$$

$$\beta) \frac{(-2) \cdot (-1\frac{1}{4})}{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}} = \frac{(-2) \cdot (-\frac{5}{4})}{\frac{6}{15} - \frac{5}{15}} = \frac{(-2) \cdot (-\frac{4}{5})}{\frac{1}{15}} = \frac{+\frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 5}}{\frac{1}{15}} = \frac{+\frac{8}{5}}{\frac{1}{15}} = \frac{8}{5} \cdot \frac{15}{1} = \frac{8}{5} \cdot \frac{15}{1} = \frac{8 \cdot \cancel{15}^3}{\cancel{5} \cdot 1} = \frac{24}{1} = 24$$

8. Αν ο αριθμός x είναι ο αντίθετος του $+5$ και ο αριθμός y είναι ο αντίστροφος του $-\frac{1}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = x \div y - (x - y)$

$$x = -5 \text{ και } y = -3$$

$$\begin{aligned} A = x \div y - (x - y) &= (-5) \div (-3) - [(-5) - (-3)] \\ &= +\frac{5}{3} - (-5 + 3) \\ &= +\frac{5}{3} - (-2) \\ &= +1\frac{2}{3} + 2 = 3\frac{2}{3} \end{aligned}$$

9. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την απλοποιημένη της μορφή που βρίσκεται στη στήλη Β.

| A | B | | | | |
|---------------------------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| α. $x - 3x + 7x$ | 1. $-6x$ | α. | β. | γ. | δ. |
| β. $2x + 6x - x$ | 2. $-16x$ | 3 | 4 | 1 | 2 |
| γ. $-4x - 5x + 3x$ | 3. $5x$ | | | | |
| δ. $-9x + x - 8x$ | 4. $7x$ | | | | |
| | 5. $8x$ | | | | |

10. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = 5(x - 2\psi) - 4(3x + \psi - 2) - 12$

α) Να γράψετε την παράσταση Α σε πιο απλή μορφή

β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α, όταν $x = -2$ και $\psi = +1$

$$\alpha) A = 5(x - 2\psi) - 4(3x + \psi - 2) - 12$$

$$A = 5x - 10\psi - 12x - 4\psi + 8 - 12$$

$$A = -7x - 14\psi - 4$$

$$\beta) A = -7 \cdot (-2) - 14 \cdot (+1) - 4$$

$$A = \cancel{+14} - \cancel{14} - 4$$

$$A = -4$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x + 5 - 2x = 3 + x$$

$$\Leftrightarrow x - 2x - x = 3 - 5$$

$$\Leftrightarrow x - 3x = 3 - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-2}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = +1$$

$$\beta) \quad 3(2 + \gamma) = -18$$

$$\Leftrightarrow 6 + 3\gamma = -18$$

$$\Leftrightarrow 3\gamma = -18 - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\gamma}{3} = \frac{-24}{3}$$

$$\Leftrightarrow \gamma = -8$$

$$\gamma) \quad 7(\beta - 1) = 5(3\beta - 2) - 5$$

$$\Leftrightarrow 7\beta - 7 = 15\beta - 10 - 5$$

$$\Leftrightarrow 7\beta - 15\beta = -10 - 5 + 7$$

$$\Leftrightarrow -8\beta = -8$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8\beta}{-8} = \frac{-8}{-8}$$

$$\Leftrightarrow \beta = +1$$

$$\delta) \quad 3(\psi + 2) - 2(\psi - 1) = 5 - (\psi - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3\psi + 6 - 2\psi + 2 = 5 - \psi + 1$$

$$\Leftrightarrow 3\psi - 2\psi + \psi = 5 + 1 - 6 - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\psi}{2} = \frac{-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \psi = -1$$

$$\epsilon) \quad \frac{5}{3} + \frac{3}{2x} = \frac{15}{x}$$

$$\Leftrightarrow 5x + 6x = 45$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x}{11} = \frac{45}{11}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{45}{11}$$

$$\Leftrightarrow x = 4\frac{1}{11}$$

$$\sigma\tau) \quad \frac{4}{2(\omega-3)} + \frac{5}{(\omega+2)} = -\frac{10}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8(\omega - 3) + 5(\omega + 2) = -10$$

$$\Leftrightarrow 8\omega - 24 + 5\omega + 10 = -10$$

$$\Leftrightarrow 8\omega + 5\omega = -10 + 24 - 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{13\omega}{13} = \frac{4}{13}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{4}{13}$$

$$\zeta) \quad \frac{1}{(\alpha-1)} - \frac{2}{(2\alpha+3)} = \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1) - 2(2\alpha + 3) = 4\alpha - 4$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 - 4\alpha - 6 = 4\alpha - 4$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 4\alpha - 4\alpha = -4 + 1 + 6$$

$$\Leftrightarrow -7\alpha = +3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7\alpha}{-7} = \frac{+3}{-7}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{7}$$

Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με τη χρήσης εξίσωσης.

12. Ένας καταστηματάρχης πρέπει να προμηθεύσει το κατάστημά του με 150 ηλεκτρικές συσκευές. Χρειάζεται τετραπλάσιο αριθμό τηλεοράσεων από τον αριθμό των ψυγείων και 10 πλυντήρια ρούχων λιγότερα από το τριπλάσιο του αριθμού των ψυγείων. Πόσες τηλεοράσεις, πόσα ψυγεία και πόσα πλυντήρια ρούχων χρειάζεται για το κατάστημά του;

αριθμός ψυγείων: x
 αριθμός τηλεοράσεων: $4x$
 αριθμός πλυντηρίων: $3x - 10$

Εξίσωση: $x + 4x + 3x - 10 = 150$

$$\Leftrightarrow x + 4x + 3x = 150 + 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x}{8} = \frac{160}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 20$$

αριθμός ψυγείων: $x = 20$
 αριθμός τηλεοράσεων: $4x = 4 \cdot 20 = 80$
 αριθμός πλυντηρίων: $3x - 10 = 3 \cdot 20 - 10 = 60 - 10 = 50$

Απ.: Το κατάστημα χρειάζεται 20 ψυγεία, 80 τηλεοράσεις και 50 πλυντήρια.

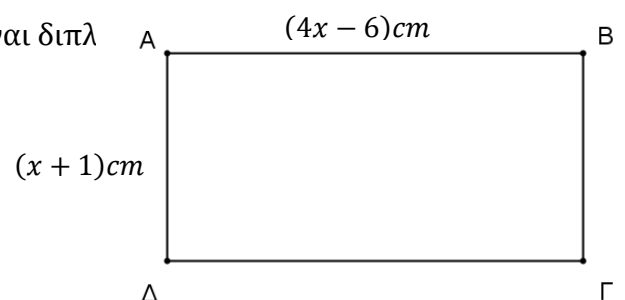
Ένας καταστηματάρχης πρέπει να προμηθεύσει το κατάστημά του με 150 ηλεκτρικές συσκευές.

13. Αν στο πιο κάτω ορθογώνιο η πλευρά AB είναι διπλ υπολογίστε την περίμετρό του.

$$(AB) = 2 \cdot (AD)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6 = 2 \cdot (x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6 = 2x + 2$$



Η πλευρά AB είναι διπλάσια της AD.

$$\Leftrightarrow 4x - 2x = +2 + 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ cm}$$

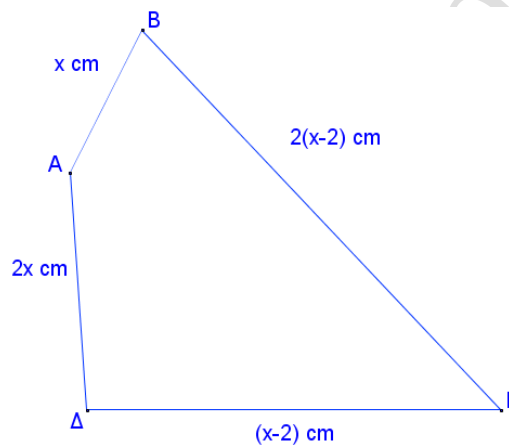
$$AB = 4x - 6 = 4 \cdot 4 - 6 = 16 - 6 = 10 \text{ cm}$$

$$AD = x + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ cm}$$

$$\Pi = 2 \cdot (AB) + 2 \cdot (AD) = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 20 + 10 = 30 \text{ cm}$$

Απ.: Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 30 cm.

14. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Η πλευρά ΑΔ είναι διπλάσια από την ΑΒ, η πλευρά ΔΓ είναι κατά 2 cm μικρότερη από την ΑΒ και η ΒΓ είναι διπλάσια από τη ΔΓ. Αν η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 60 cm να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τετραπλεύρου.



Εξίσωση: $x + 2x + x - 2 + 2(x - 2) = 60$

$$\Leftrightarrow x + 2x + x - 2 + 2x - 4 = 60$$

$$\Leftrightarrow x + 2x + x + 2x = 60 + 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{66}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \text{ cm}$$

$$AB = x = 11 \text{ cm}$$

$$BG = 2(x - 2) = 2 \cdot (11 - 2) = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}$$

$$GD = x - 2 = 11 - 2 = 9 \text{ cm}$$

$$AD = 2x = 2 \cdot 11 = 22 \text{ cm}$$

Απ. : Η πλευρά ΑΒ είναι 11 cm, η ΒΓ είναι 18 cm, ΓΔ είναι 9 cm και η ΑΔ είναι 22 cm.

Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 60 cm.

15. Ένας μάεστρος ανέλαβε να οργανώσει μια συναυλία με 3 διαφορετικά έγχορδα μουσικά όργανα: βιολιά, κιθάρες και βιολοντσέλα. Συνολικά χρησιμοποίησε 120 μουσικά όργανα. Τα βιολοντσέλα ήταν 20 λιγότερα από τα βιολιά και οι κιθάρες τριπλάσιες από τα βιολοντσέλα. Πόσα βιολιά, κιθάρες και βιολοντσέλα χρησιμοποιήθηκαν;

$$\begin{aligned} \text{βιολιά: } & x \\ \text{βιολοντσέλα: } & x - 20 \\ \text{κιθάρες: } & 3(x - 20) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήθηκαν 120 μουσικά όργανα

$$\begin{aligned} \text{Εξίσωση: } & x + 3(x - 20) + x - 20 = 120 \\ & \Leftrightarrow x + 3x - 60 + x - 20 = 120 \\ & \Leftrightarrow x + 3x + x = 120 + 60 + 20 \\ & \Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{200}{5} \\ & \Leftrightarrow x = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{βιολιά: } & x = 40 \\ \text{βιολοντσέλα: } & x - 20 = 40 - 20 = 20 \\ \text{κιθάρες: } & 3(x - 20) = 3 \cdot (40 - 20) = 3 \cdot 20 = 60 \end{aligned}$$

Απ.: Χρησιμοποιήθηκαν 40 βιολιά, 60 κιθάρες και 20 βιολοντσέλα.

16. Σε μια θεατρική παράσταση το εισιτήριο για ενήλικες ήταν 8 ευρώ και για παιδιά 5 ευρώ. Την παράσταση παρακολούθησαν συνολικά 100 ενήλικες και παιδιά. Αν η συνολική είσπραξη ήταν 590 ευρώ, να υπολογίσετε πόσοι ήταν οι ενήλικες και πόσα τα παιδιά.

| | Είσπραξη |
|-------------------|--------------|
| Ενήλικες : x | $8x$ |
| Παιδιά: $100 - x$ | $5(100 - x)$ |

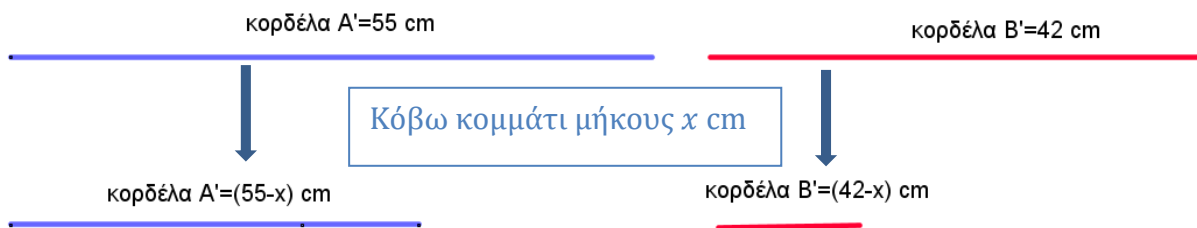
$$\begin{aligned} \text{Εξίσωση: } & 8x + 5(100 - x) = 590 \\ & \Leftrightarrow 8x + 500 - 5x = 590 \\ & \Leftrightarrow 8x - 5x = 590 - 500 \\ & \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{90}{3} \\ & \Leftrightarrow x = 30 \end{aligned}$$

Η συνολική είσπραξη ήταν 590 ευρώ.

$$\begin{aligned} \text{Ενήλικες : } & x = 30 \\ \text{Παιδιά: } & 100 - x = 100 - 30 = 70 \end{aligned}$$

Απ.: Τα παιδιά ήταν 70 και οι ενήλικες 30.

17. Έχω δύο κορδέλες που έχουν μήκος 55cm και 42cm. Αν κόψω ένα κομμάτι x cm από κάθε κορδέλα, τότε η μια κορδέλα θα έχει διπλάσιο μήκος από την άλλη. Να υπολογίσετε το x .



Εξίσωση: $55 - x = 2(42 - x)$
 $\Leftrightarrow 55 - x = 84 - 2x$
 $\Leftrightarrow -x + 2x = 84 - 55$
 $\Leftrightarrow x = 29$ cm

Αν κόψω ένα κομμάτι x cm από κάθε κορδέλα, τότε η μια κορδέλα θα έχει διπλάσιο μήκος από την άλλη.

Απ. : Το κομμάτι που έκοψα έχει μήκος 29 cm.

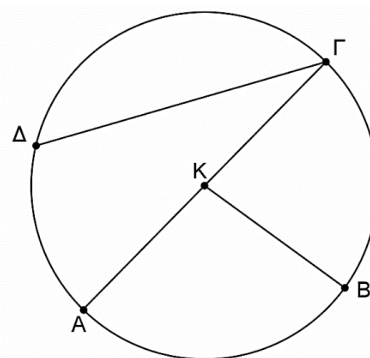
Ενότητα 6: Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

1. Στον πιο κάτω πίνακα να γράψετε το είδος της κάθε γωνίας χρησιμοποιώντας τους χαρακτηρισμούς : μηδενική , οξεία, αμβλεία, ευθεία, μη κυρτή, πλήρης.

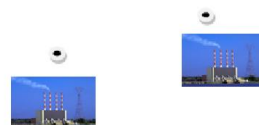
| Μέτρο γωνίας | Είδος γωνίας | Μέτρο γωνίας | Είδος γωνίας |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 90° | ορθή | 92° | αμβλεία |
| 89° | οξεία | 360° | πλήρης |
| 180° | ευθεία | 36° | οξεία |
| 285° | μη κυρτή | 0° | μηδενική |

2. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R. Με τη βοήθεια του σχήματος να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της Α' στήλης με τα στοιχεία της Β' στήλης:

| Α' στήλη | Β' στήλη |
|-------------------|--------------------|
| 1) ΑΓ | α) επίκεντρη γωνία |
| 2) ΚΒ | β) διάμετρος |
| 3) ΔΓ | γ) τόξο |
| 4) ΑΚΒ | δ) χορδή |
| 5) $\widehat{ΑΔ}$ | ε) ακτίνα |

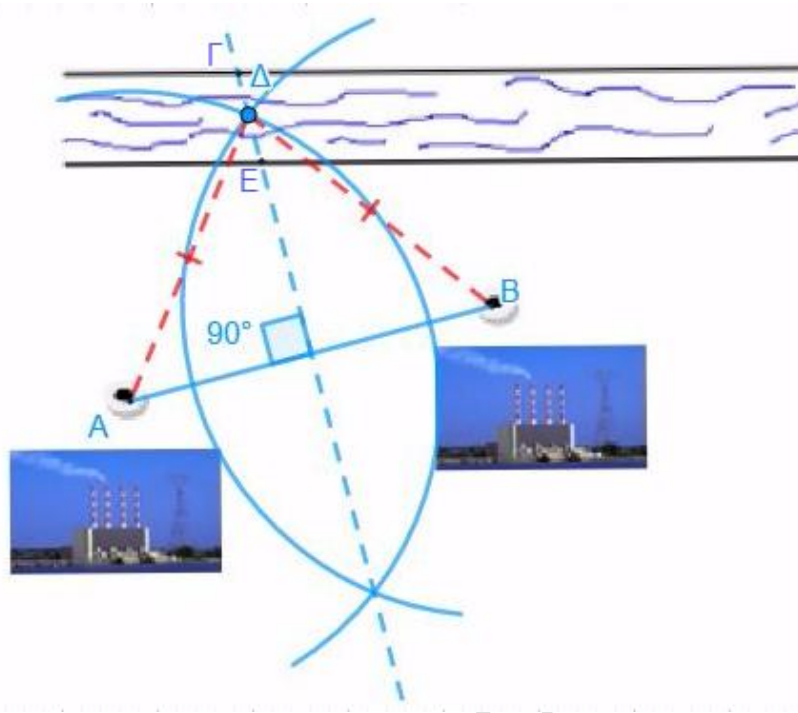


3. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο χωριά. Οι κοινοτάρχες τους αποφάσισαν να κατασκευάσουν μια γέφυρα πάνω από τον ποταμό, η οποία να ισαπέχει από τα δύο χωριά. Να βρείτε σε ποιο σημείο του ποταμού πρέπει να κατασκευαστεί η γέφυρα.



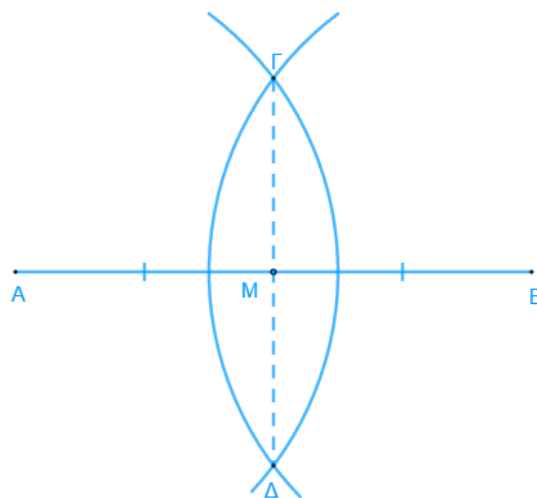
Πρέπει να κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο χωριά αφού έχουμε μάθει, ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του. (Κατασκευή μεσοκαθέτου βλέπετε Βιβλίο Μέρους Β' σελ. 52)

Η γέφυρα ΓΕ θα κατασκευαστεί πάνω στη μεσοκάθετη και θα περάσει από το σημείο Δ.



4. α) Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB=8\text{cm}$.
 β) Να κατασκευάσετε τη **μεσοκάθετη** του με χρήση χάρακα και διαβήτη.

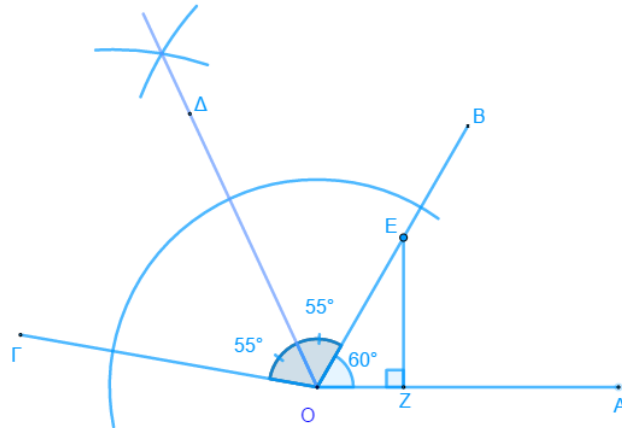
Κατασκευή μεσοκάθετης βλέπετε Βιβλίο Μέρος Β' σελ. 52



5. Να κατασκευάσετε δυο **εφεξής γωνίες** $\widehat{A\hat{O}B} = 60^\circ$ και $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 110^\circ$

α) Να κατασκευάσετε τη **διχοτόμο** OD της γωνίας $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ με χάρακα και διαβήτη.

Κατασκευή διχοτόμου βλέπετε Βιβλίο Μέρους Β' σελ. 42



β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\hat{O}\Delta}$

$$\widehat{A\hat{O}\Delta} = \widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}\Delta} = 60^\circ + 55^\circ = 115^\circ$$

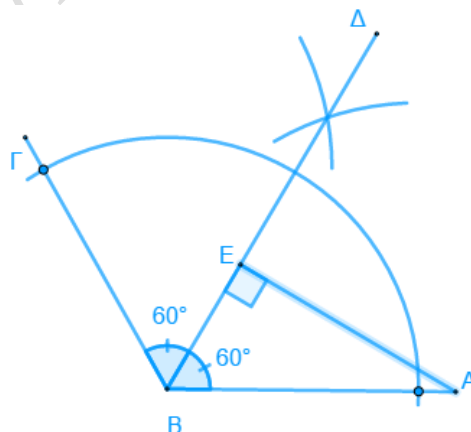
γ) Στη πλευρά BO να σημειώσετε τυχαίο σημείο E και να φέρετε την **απόσταση** του σημείου από την πλευρά OA .

Η απόσταση του σημείου E από την πλευρά OA είναι το ευθύγραμμο τμήμα EZ το οποίο φέρουμε κάθετα από το σημείο E στην OA .

6. Δίνεται γωνία $\widehat{A\hat{B}\Gamma} = 120^\circ$.

α) Να κατασκευάσετε τη **διχοτόμο** $B\Delta$ της γωνίας $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ με χάρακα και διαβήτη

Κατασκευή διχοτόμου βλέπετε Βιβλίο Μέρους Β' σελ. 42



β) Να φέρετε την **απόσταση** του σημείου A από τη διχοτόμο $B\Delta$

Η απόσταση του σημείου A από τη διχοτόμο $B\Delta$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα AE το οποίο φέρουμε κάθετα από το σημείο A στην $B\Delta$.

7. Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι κατά 10° μικρότερη από το τετραπλάσιο της συμπληρωματικής της.

$$\hat{\alpha} = x$$

$$\hat{\beta} = 4x - 10^\circ$$

Εξίσωση: $x + 4x - 10^\circ = 90^\circ$ (συμπληρωματικές γωνίες)

$$\Leftrightarrow x + 4x = 90^\circ + 10^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{100^\circ}{5}$$

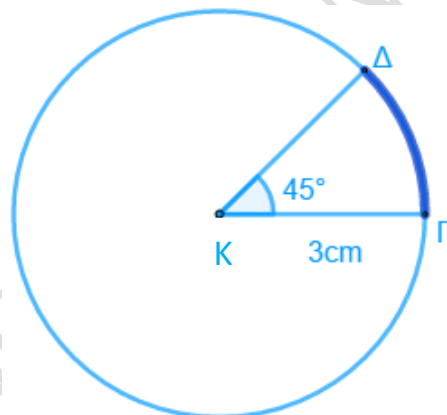
$$\Leftrightarrow x = 20^\circ$$

$$\hat{\alpha} = x = 20^\circ$$

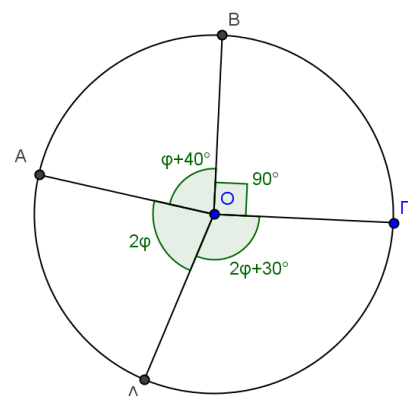
$$\hat{\beta} = 4x - 10 = 4 \cdot 20^\circ - 10^\circ = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$$

Απ.: Η γωνία είναι ίση με 70° .

8. Να κατασκευάσετε κύκλο (Κ, 3cm) και τόξο ΓΔ που να αντιστοιχεί σε γωνία 45° .



9. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R.
- Να υπολογίσετε τα ακόλουθα τόξα και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας :
 α) \widehat{AB} β) $\widehat{\Gamma\Delta}$ γ) $\widehat{\Delta\Gamma\Lambda}$



- Τι είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ για τη γωνία $\widehat{\Delta\Theta\text{B}}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\begin{aligned}
 \text{i. } & \varphi + 40^\circ + 90^\circ + 2\varphi + 30^\circ + 2\varphi = 360^\circ \text{ (πλήρης γωνία)} \\
 & \varphi + 2\varphi + 2\varphi + 160^\circ = 360^\circ \\
 & \varphi + 2\varphi + 2\varphi = 360^\circ - 160^\circ \\
 & \frac{5\varphi}{5} = \frac{200^\circ}{5} \\
 & \varphi = 40^\circ
 \end{aligned}$$

$$\alpha) \widehat{AB} = \widehat{AOB} = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$$

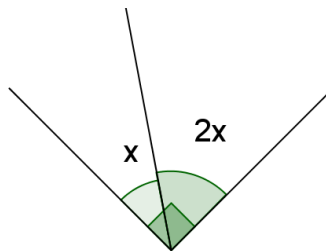
$$\beta) \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = 2\varphi + 30^\circ = 2 \cdot 40^\circ + 30^\circ = 80^\circ + 30^\circ = 110^\circ$$

$$\gamma) \widehat{\Delta\Gamma\Lambda} = \widehat{\Gamma\hat{O}\Delta} = \Gamma = \Delta\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta = 110^\circ + 90^\circ = 200^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } & \widehat{AOB} = \varphi + 40^\circ = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ \\
 & \Delta\hat{O}A = 2\varphi = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ \\
 & \widehat{AOB} = \Delta\hat{O}A \longrightarrow \text{το ευθύγραμμο τμήμα } OA \text{ είναι διχοτόμος της γωνίας } \Delta\hat{O}B
 \end{aligned}$$

10. Να υπολογίσετε την τιμή του χ , ψ και ω στα πιο κάτω σχήματα (χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου). Να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας

α)



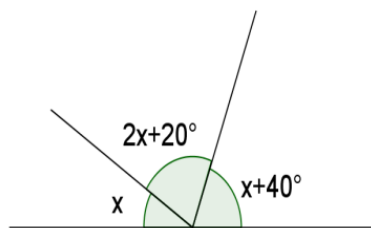
$$x + 2x = 90^\circ \text{ (συμπληρωματικές γωνίες)}$$

$$3x = 90^\circ$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{90^\circ}{3}$$

$$x = 30^\circ$$

β)



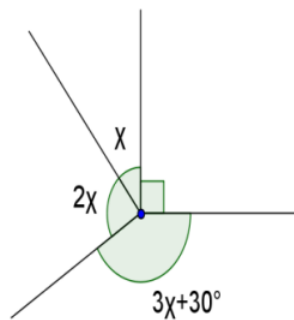
$$x + 2x + 20^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ \text{ (ευθεία γωνία)}$$

$$x + 2x + x = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{120^\circ}{4}$$

$$x = 30^\circ$$

γ)



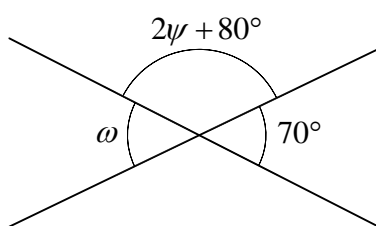
$$x + 90^\circ + 3x + 30^\circ + 2x = 360^\circ \text{ (πλήρης γωνία)}$$

$$x + 2x + x = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{120^\circ}{4}$$

$$x = 30^\circ$$

δ)



$$\omega = 70^\circ \text{ (κατακορυφήν γωνίες)}$$

$$2\psi + 80^\circ + 70^\circ = 180^\circ \text{ (παραπληρωματικές γωνίες)}$$

$$2\psi + 150^\circ = 180^\circ$$

$$2\psi = 180^\circ - 150^\circ$$

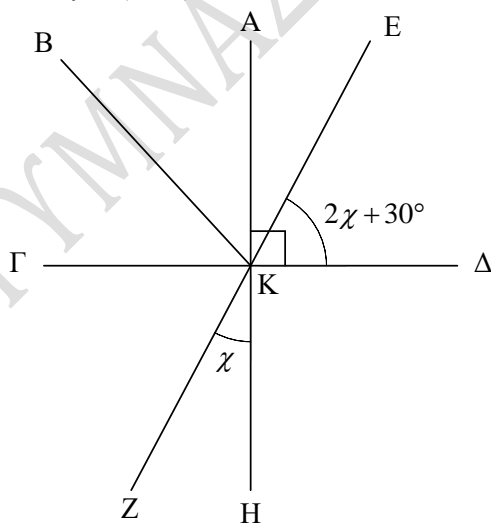
$$2\psi = 30^\circ$$

$$\frac{2\psi}{2} = \frac{30^\circ}{2}$$

$$\psi = 15^\circ$$

11. Στο πιο κάτω σχήμα η ΚΒ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ και ΔΚΑ = 90°.

Να υπολογίσετε τις γωνίες χ, ΒΚΑ, ΓΚΖ και ΖΚΔ (χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου). Να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\chi = \widehat{AKE} \text{ (κατακορυφήν γωνίες)}$$

$$\widehat{ZKD} = \widehat{ZKH} + \widehat{HKD}$$

$$\widehat{EKA} + \widehat{AKE} = 90^\circ \text{ (συμπληρωματικές γωνίες)}$$

$$\widehat{ZKD} = 20^\circ + 90^\circ$$

$$\chi + 2\chi + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\widehat{Z\hat{K}\Delta} = 110^\circ$$

$$\chi + 2\chi = 90^\circ - 30^\circ$$

$$3\chi = 60^\circ$$

$$\frac{3\chi}{3} = \frac{60^\circ}{3}$$

$$\chi = 20^\circ$$

$$\widehat{\Delta\hat{K}A} + \widehat{AK\Gamma} = 180^\circ \text{ (παραπληρωματικές)}$$

$$90^\circ + \widehat{AK\Gamma} = 180^\circ$$

$$\widehat{AK\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\widehat{AK\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B\hat{K}A} = \widehat{B\hat{K}\Gamma} = 45^\circ \text{ (KB διχοτόμος της } \widehat{AK\Gamma}\text{)}$$

$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} + \widehat{ZKH} = 90^\circ \text{ (συμπληρωματικές γωνίες)}$$

$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} + 20^\circ = 90^\circ$$

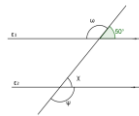
$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} = 90^\circ - 20^\circ$$

$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} = 70^\circ$$

Ενότητα 9: Γεωμετρία II

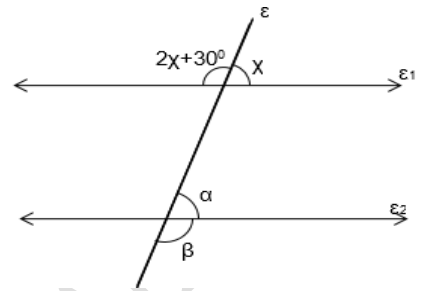
1. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες στα πιο κάτω σχήματα αν $\epsilon_1 // \epsilon_2$.
 Να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις και να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α)



$\chi = 50^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)
 $\omega = 180 - 50 = 130^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)
 $\psi = \chi = 130^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)

β)



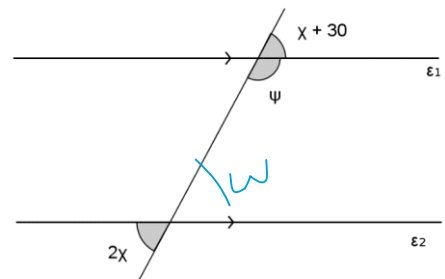
$2\chi + 30 + \chi = 180^\circ$ (παραπληρωματικές γ.)
 $\Leftrightarrow 3\chi = 150$
 $\Leftrightarrow \chi = 50^\circ$
 $\alpha = \chi = 50^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)
 $\alpha = \beta = 130^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)

γ)



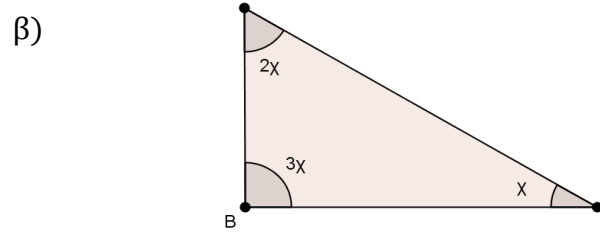
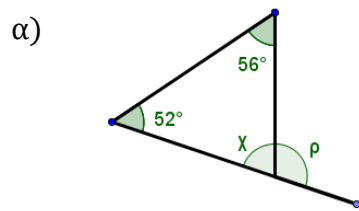
$2\chi - 20 + \chi + 50 = 180^\circ$ (εντός επί τα αυτά)
 $\Leftrightarrow 3\chi = 150$
 $\Leftrightarrow \chi = 50$
 $\omega = 2\chi - 20 = 80^\circ$ (εντός εναλλάξ)
 $\psi = \chi + 50 = 100^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

δ)



$\omega = 2\chi$ (κατακορυφήν)
 $\omega = \chi + 30^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)
 Άρα $2\chi = \chi + 30$
 $\Leftrightarrow \chi = 30$
 $\psi = \chi + 30 = 120^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ και ρ στα πιο κάτω τρίγωνα. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\begin{aligned}
 x + 52^\circ + 56^\circ &= 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow x + 108^\circ &= 180^\circ \\
 \Leftrightarrow x &= 180^\circ - 108^\circ \\
 \Leftrightarrow x &= 72^\circ \\
 \rho &= 52^\circ + 56^\circ \text{ (εξωτερική γωνία τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow \rho &= 108^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\chi + 3\chi + \chi &= 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow 6\chi &= 180 \\
 \Leftrightarrow \chi &= 30^\circ
 \end{aligned}$$

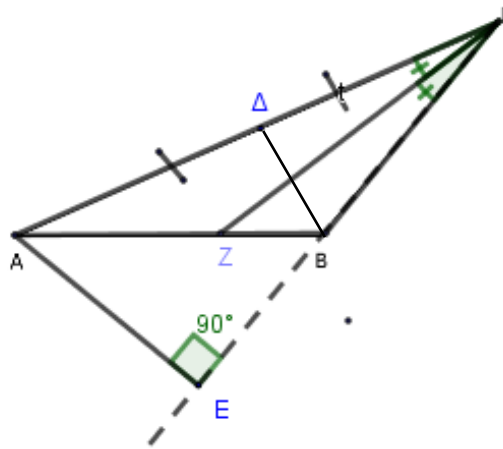
3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία A είναι 30° μικρότερη από το διπλάσιο της γωνίας B και η γωνία Γ τριπλάσια από τη B . Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

$$\begin{aligned}
 A &= 2\chi - 30 & B &= \chi & \Gamma &= 3\chi \\
 A + B + \Gamma &= 180 \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow 2\chi - 30 + \chi + 3\chi &= 180 \\
 \Leftrightarrow 6\chi &= 210 \\
 \Leftrightarrow \chi &= 35
 \end{aligned}$$

4. Για κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να γράψετε τι είναι το $A\Delta$: ύψος, διχοτόμος, διάμεσος

| | | |
|---|---|--|
| <p>α)</p> <p>$A\Delta$: διάμεσος</p> | <p>β)</p> <p>$A\Delta$: ύψος</p> | <p>γ)</p> <p>$A\Delta$: διχοτόμος</p> |
|---|---|--|

5. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα να κατασκευάσετε τη διάμεσο ΒΔ, το ύψος ΑΕ και τη διχοτόμο ΓΖ του τριγώνου ΑΒΓ.



6. Στο πιο κάτω σχήμα αν ΑΜ είναι διάμεσος και ΒΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ να υπολογίσετε την τιμή των χ και ψ.

$$\begin{aligned} \psi &= 40^\circ \text{ (ΒΔ διχοτόμος)} \\ 3x + 4 &= 5x - 10 \text{ (ΑΜ διάμεσος)} \\ \Leftrightarrow 3x - 5x &= -4 - 10 \\ \Leftrightarrow -2x &= -14 \\ \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} &= \frac{-14}{-2} \Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

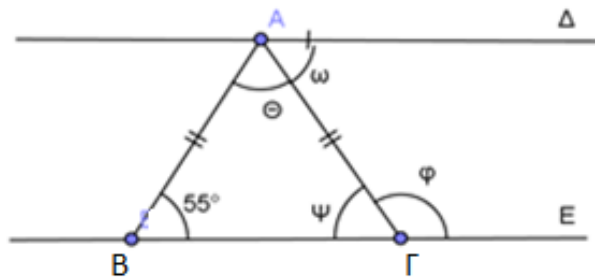


7. Να βρείτε το είδος του τριγώνου σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

| | Ως προς τις γωνίες | Ως προς τις πλευρές |
|--|--------------------|---------------------|
| Α) Οι δυο γωνίες είναι 60° και 60° . $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 120^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$ | Οξυγώνιο | Ισόπλευρο |
| Β) Οι δυο γωνίες του είναι 36° και 54° . $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (36^\circ + 54^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$ | Ορθογώνιο | Σκαληνό |

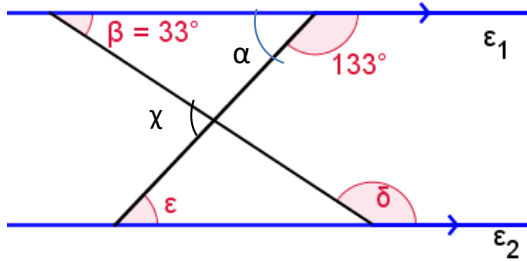
| | | |
|--|-------------------|------------------|
| <p>Γ) Οι δύο εξωτερικές γωνίες του είναι 135° η κάθε μια. $\hat{A} = 180^\circ - \widehat{A\epsilon\xi} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ $\hat{B} = 180^\circ - \widehat{B\epsilon\xi} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$</p> | <p>Ορθογώνιο</p> | <p>Ισοσκελές</p> |
| <p>Δ) Οι δύο γωνίες 40° και 100°. $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ)$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 140^\circ$ $\Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 40^\circ$</p> | <p>Αμβλυγώνιο</p> | <p>Ισοσκελές</p> |

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται: $AD \parallel BE$, $AB=AG$ και $\widehat{ABG} = 55^\circ$.
 Να υπολογίσετε τις γωνίες ψ , θ , φ , ω . (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



$AB = AG \Rightarrow \triangle ABG$ ισοσκελές τρίγωνο
 $\psi = 55^\circ$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)
 $\theta + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)
 $\Leftrightarrow \theta + 110^\circ = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow \theta = 180^\circ - 110^\circ$
 $\Leftrightarrow \theta = 70^\circ$
 $\psi = \omega = 55^\circ$ (εντός εναλλάξ)
 $\varphi + \psi = 180^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)
 $\Rightarrow \varphi + 55^\circ = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow \varphi = 180^\circ - 55^\circ$
 $\Leftrightarrow \varphi = 125^\circ$

9. Στο πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ε και δ . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

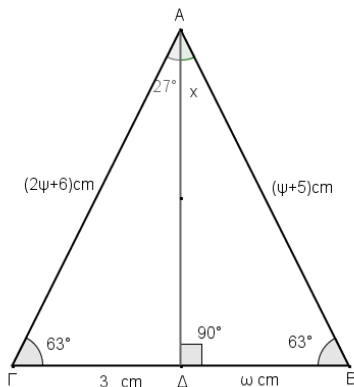


$$\begin{aligned} \varepsilon + 133^\circ &= 180^\circ \text{ (εντός επί τα αυτά)} \\ \Leftrightarrow \varepsilon &= 180^\circ - 133^\circ \\ \Leftrightarrow \varepsilon &= 47^\circ \\ \beta + \delta &= 180^\circ \text{ (εντός επί τα αυτά)} \\ \Leftrightarrow \delta + 33^\circ &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \delta &= 180^\circ - 33^\circ = 147^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon = 47^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \chi &= \alpha + \beta \text{ (εξωτερική γωνία τριγώνου)} \\ \Leftrightarrow \chi &= 47^\circ + 33^\circ = 80^\circ \end{aligned}$$

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να υπολογίσετε την τιμή των χ , ψ και ω . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

$$\hat{\Gamma} = \hat{B} \Rightarrow \text{ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο}$$



$$\begin{aligned} 2\psi + 6 &= \psi + 5 \text{ (ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου)} \\ \Leftrightarrow 2\psi - \psi &= 5 - 6 \\ \Leftrightarrow \psi &= -1 \end{aligned}$$

$$\widehat{A\Delta B} = 90^\circ \Rightarrow \text{ΑΔ ύψος που φέρουμε προς}$$

τη βάση ισοσκελούς τριγώνου

άρα είναι διχοτόμος και διάμεσος

$$\chi = 27^\circ \text{ (ΑΔ διχοτόμος)}$$

$$\omega = 3 \text{ cm (ΑΔ διάμεσος)}$$

11. Στο πιο κάτω σχήμα οι ευθείες $\chi\chi$ και $\psi\psi$ είναι παράλληλες. Η BZ είναι η διχοτόμος της γωνίας B . Να υπολογίσετε τις γωνίες β , γ και δ .

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = x \text{ (} BZ \text{ διχοτόμος)}$$

$$\hat{A}BX = \hat{\Psi}AB \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\Rightarrow 2x = 56^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{56^\circ}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 28^\circ$$

$$\hat{B}_2 = \beta = 28^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

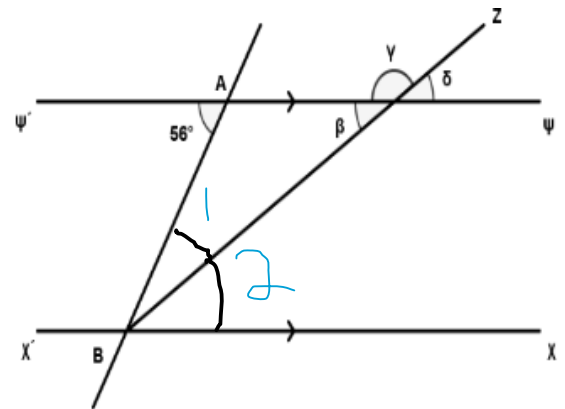
$$\beta = \delta = 28^\circ \text{ (κατακορυφήν)}$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ \text{ (παραπληρωματικές γωνίες)}$$

$$\Rightarrow \gamma + 28^\circ = 180^\circ$$

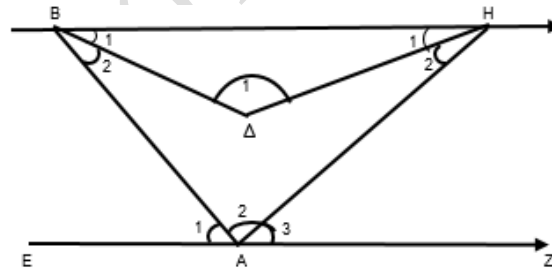
$$\Leftrightarrow \gamma = 180^\circ - 28^\circ$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 152^\circ$$



12. Στο πιο κάτω σχήμα έχουμε ότι $BH \parallel EZ$, $\hat{A}_1 = 50^\circ$, $\hat{A}_1 = 135^\circ$, $B\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}BH$ και $H\Delta$ διχοτόμος της $\hat{A}HB$. Να υπολογίσετε τις γωνίες \hat{B}_1 , \hat{H}_1 και \hat{A}_3 .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = x \text{ (} B\Delta \text{ διχοτόμος)}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}BH = 2x \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\Rightarrow 2x = 50^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{50^\circ}{2} \Leftrightarrow x = 25^\circ$$

$$\hat{B}_1 + \hat{A}_1 + \hat{H}_1 = 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Leftrightarrow 25^\circ + 135^\circ + \hat{H}_1 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 160^\circ + \hat{H}_1 = 180^\circ$$

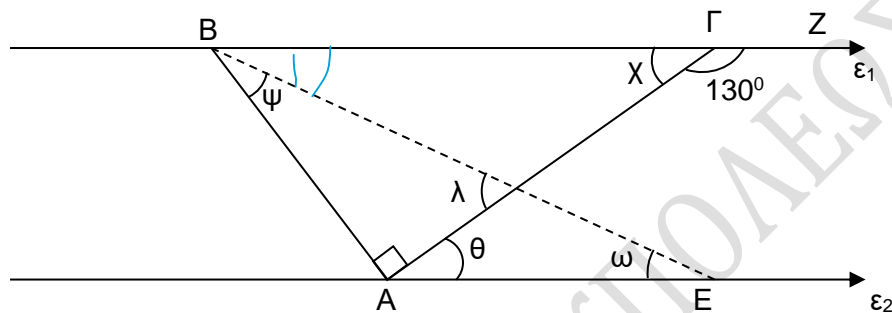
$$\Leftrightarrow \hat{H}_1 = 180^\circ - 160^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{H}_1 = 20^\circ$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{A} &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \hat{A} &= 180^\circ - 70^\circ \\ \Leftrightarrow \hat{A} &= 110^\circ \Rightarrow \widehat{B\hat{A}G} = 110^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{B\hat{F}A} = \widehat{\Delta\hat{E}A} = 30^\circ \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά)}$$

14. Στο πιο κάτω σχήμα $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$, $BA \perp AG$ και BE διχοτόμος της γωνιάς $A\hat{B}G$ και $A\hat{F}Z = 130^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνιές χ , ψ , ω , λ και θ . (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



$$\chi = 180 - 130 = 50^\circ \text{ (παραπληρωματικές)}$$

$$B = 180 - (50 + 90) = 40^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνων)}$$

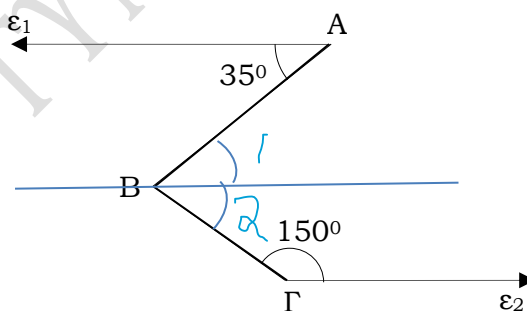
$$B_1 = \psi = \frac{40}{2} = 20^\circ \text{ (BE διχοτόμος)}$$

$$\omega = B_1 = 20^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\theta = \chi = 50^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\lambda = \theta + \omega = 70^\circ \text{ (εξωτερική γωνιά τριγώνου)}$$

15. Αν $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$, $\hat{A} = 35^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 150^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $AB\hat{\Gamma}$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\widehat{B_1} = \hat{A} = 35^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\widehat{B_1} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ (εντός επί τα αυτά)}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{B_1} + 150^\circ = 180^\circ$$

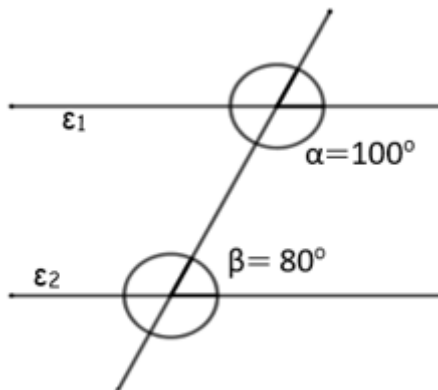
$$\Leftrightarrow \widehat{B_1} = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{B_1} = 30^\circ$$

$$AB\hat{\Gamma} = 35^\circ + 30^\circ = 65^\circ$$

16. Στα πιο κάτω σχήματα να εξετάσετε αν $\epsilon_1 // \epsilon_2$.

α)

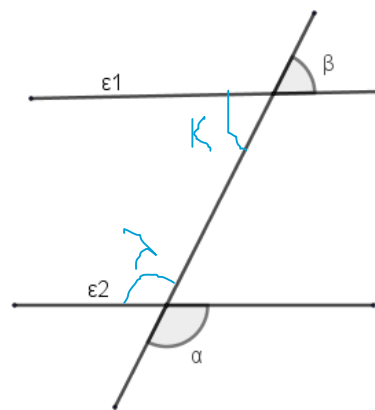


$$\alpha + \beta = 100 + 80 = 180^\circ$$

α και β σε θέση εντός και επί τα αυτά

$\epsilon_1 // \epsilon_2$

β)



$$\hat{\alpha} = 150^\circ - 2\theta \text{ και } \hat{\beta} = 2\theta + 20^\circ$$

$k = \beta$ (κατακορυφήν)

$\lambda = \alpha$ (κατακορυφήν)

$$k + \lambda = \beta + \alpha = 2\theta + 20^\circ + 150^\circ - 2\theta = 180^\circ$$

κ, λ σε θέση εντός επί τα αυτά

$\epsilon_1 // \epsilon_2$

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΝΘΟΥΠΟΛΕΩΣ

Ενότητα 10: Λόγοι-Αναλογίες

1. Να υπολογίσετε το x στις πιο κάτω αναλογίες :

$$\alpha) \quad \frac{x}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot x = 6 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

$$\beta) \quad \frac{x+4}{x} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (x+4) = 3 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 5x + 20 = 3x$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3x = -20$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-20}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -10$$

$$\gamma) \quad \frac{8}{x} = \frac{4}{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot (2-x) = 4 \cdot x$$

$$\Leftrightarrow -8x - 4x = -16$$

$$\Leftrightarrow \frac{-12x}{-12} = \frac{-16}{-12}$$

$$\Leftrightarrow x = +\frac{4}{3}$$

$$\delta) \quad \frac{x-2}{4} = \frac{x+7}{16}$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot (x-2) = 4 \cdot (x+7)$$

$$\Leftrightarrow 16x - 32 = 4x + 28$$

$$\Leftrightarrow 16x - 4x = 32 + 28$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x}{12} = \frac{60}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

2. Ο λόγος της ηλικίας του Βάσου προς την ηλικία του πατέρα του είναι 2:7. Αν ο πατέρας του είναι 42 χρονών, βρείτε πόσων χρονών είναι ο Βάσος.

- Ηλικία Βάσου: x
- Ηλικία πατέρα: 42

$$\frac{x}{42} = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot x = 2 \cdot 42$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x}{7} = \frac{84}{7}$$

$$\Leftrightarrow x = 12 \text{ Απ.: Ο Βάσος είναι 12 χρονών}$$

3. Σ' ένα χάρτη με κλίμακα 1:40000 η απόσταση μεταξύ δυο πόλεων πάνω στο χάρτη είναι 10cm. Να βρείτε την πραγματική απόσταση των δυο πόλεων. (απόσταση στο σχέδιο: απόσταση στην πραγματικότητα = κλίμακα)

- Απόσταση στο σχέδιο=A.Σ=10 cm
- Απόσταση στην πραγματικότητα=A.Π= x cm

$$\frac{A.Σ}{A.Π} = \frac{1}{40000}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{1}{40000}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot x = 10 \cdot 40000$$

$$\Leftrightarrow x = 400000 \text{ cm} \quad (1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100000 \text{ cm})$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ km}$$

Απ.: Η πραγματική απόσταση των δύο πόλεων είναι 4 km.

4. Στην περίοδο εκπτώσεων ένα κατάστημα κάνει έκπτωση σε όλα του τα είδη 20%. Αν μια φούστα αρχικά πωλείται προς €35, ποια τιμή θα έχει μετά την έκπτωση;

| | Αρχική τιμή | Έκπτωση | Τελική τιμή |
|---|-------------|---------|-------------|
| % | 100 | 20 | 100-20=80 |
| € | 35 | | x |

$$\frac{100}{35} = \frac{80}{x}$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot x = 80 \cdot 35$$

$$\Leftrightarrow \frac{100x}{100} = \frac{80^{\cancel{4}} \cdot 35^{\cancel{7}}}{100^{\cancel{20}}}$$

$$\Leftrightarrow x = €28$$

Απ.: Η τιμή της φούστας μετά την έκπτωση θα είναι €28.

5. Σε ένα μαθητικό διαγωνισμό από τους 30 μαθητές πέτυχαν οι 24. Ποιο ήταν το ποσοστό αποτυχίας;

Πέτυχαν: 24 μαθητές

Απέτυχαν: $30 - 24 = 6$ μαθητές

$$\frac{x}{100} = \frac{6}{30}$$

$$\Leftrightarrow 30 \cdot x = 6 \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{30x}{30} = \frac{600}{30}$$

$$\Leftrightarrow x = 20\%$$

Απ.: Το ποσοστό αποτυχίας ήταν 20%

6. Το 30% των κατοίκων μιας πόλης έχει πανεπιστημιακή μόρφωση. Αν όλοι οι κάτοικοι είναι 900 πόσοι κάτοικοι έχουν πανεπιστημιακή μόρφωση;

$$\frac{30}{100} = \frac{x}{900}$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot x = 30 \cdot 900$$

$$\Leftrightarrow \frac{100x}{100} = \frac{30 \cdot 900}{100^1}$$

$\Leftrightarrow x = 270$ Απ.: Οι κάτοικοι που έχουν πανεπιστημιακή μόρφωση είναι 270.

7. Σε μια τάξη με 25 μαθητές, τα 15 είναι αγόρια. Τι ποσοστό των μαθητών είναι τα κορίτσια;

Αγόρια: 15

Κορίτσια: $25 - 15 = 10$

$$\frac{x}{100} = \frac{10}{25}$$

$$\Leftrightarrow 25 \cdot x = 100 \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x}{25} = \frac{100^1 \cdot 10}{25^1}$$

$$\Leftrightarrow x = 40\%$$

Απ.: Τα κορίτσια είναι το 40% των μαθητών.

8. Ο κ. Νίκος κέρδισε στο λαχείο €18000. Ξόδεψε το 30% των κερδών του για την αγορά αυτοκινητού. Τα υπόλοιπα τα μοίρασε στα 2 του παιδιά ανάλογα με τις ηλικίες τους που ήταν 7 και 11 χρονών. Πόσα ξόδεψε για την αγορά αυτοκινητού και πόσα έδωσε στο κάθε παιδί;

- Αν ξόδεψε το 30% των χρημάτων του έμειναν $100\% - 30\% = 70\%$

$$\frac{70}{100} = \frac{x}{18000}$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot x = 70 \cdot 1800$$

$$\Leftrightarrow \frac{100x}{100} = \frac{70 \cdot 18000}{100}$$

$$\Leftrightarrow x = \text{€}12600$$

- Θα μοιράσει στα παιδιά του €12600 ανάλογα με τις ηλικίες τους που είναι 7 και 11 χρονών.

Τα λεφτά που θα πάρει το μικρότερο παιδί: x

Τα λεφτά που θα πάρει το μεγαλύτερο παιδί: y

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{11} = \frac{x+y}{7+11} = \frac{12600}{18} = 700$$

$$\frac{x}{7} = 700 \Leftrightarrow x = 700 \cdot 7 = \text{€}4900$$

$$\frac{y}{11} = 700 \Leftrightarrow y = 700 \cdot 11 = \text{€}7700$$

Απ.: Το μικρότερο παιδί θα πάρει €4900 και το μεγαλύτερο €7700.

9. Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών προσφέρει έκπτωση 25% στην αρχική τιμή όλων των προϊόντων. Αν η τελική τιμή ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι €210 να βρείτε την αρχική του τιμή.

| | Αρχική τιμή | Έκπτωση | Τελική τιμή |
|---|-------------|---------|-----------------|
| % | 100 | 25 | $100 - 25 = 75$ |
| € | x | | 210 |

$$\frac{100}{x} = \frac{75}{210}$$

$$\Leftrightarrow 75 \cdot x = 210 \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{75x}{75} = \frac{210 \cdot 100}{75}$$

$$\Leftrightarrow x = \text{€}280$$

Απ.: Η αρχική τιμή του υπολογιστή ήταν €280.

10. Σε ένα διαγωνισμό Μαθηματικών, οι τρεις πρώτοι νικητές μοιράστηκαν χρηματικό ποσό €600 ανάλογα με τις σωστές απαντήσεις που έδωσε ο καθένας. Ο πρώτος έδωσε 12, ο δεύτερος 10 και ο τρίτος 8 σωστές απαντήσεις.

α) Να βρείτε πόσα χρήματα πήρε ο καθένας.

β) Ο πρώτος νικητής ξόδεψε το 20% των χρημάτων που πήρε από τον διαγωνισμό για να γιορτάσει τη νίκη του με τους φίλους του. Πόσα χρήματα του περίσσεψαν;

α)

- χρηματικό ποσό του α' μαθητή: x
- χρηματικό ποσό του β' μαθητή: y
- χρηματικό ποσό του γ' μαθητή: ω

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{\omega}{8} = \frac{x+y+\omega}{12+10+8} = \frac{600}{30} = 20$$

$$\frac{x}{12} = 20 \Leftrightarrow x = 12 \cdot 20 = \text{€}240$$

$$\frac{y}{10} = 20 \Leftrightarrow y = 10 \cdot 20 = \text{€}200$$

$$\frac{\omega}{8} = 20 \Leftrightarrow \omega = 8 \cdot 20 = \text{€}160$$

Απ.: Ο α' μαθητής πήρε €240, ο β' μαθητής πήρε €200 και ο γ' μαθητής πήρε €160.

β) Ξόδεψε το 20% των χρημάτων του άρα του έμειναν $100\% - 20\% = 80\%$

$$\frac{80}{100} = \frac{x}{240}$$

$$\Leftrightarrow 100 \cdot x = 80 \cdot 240$$

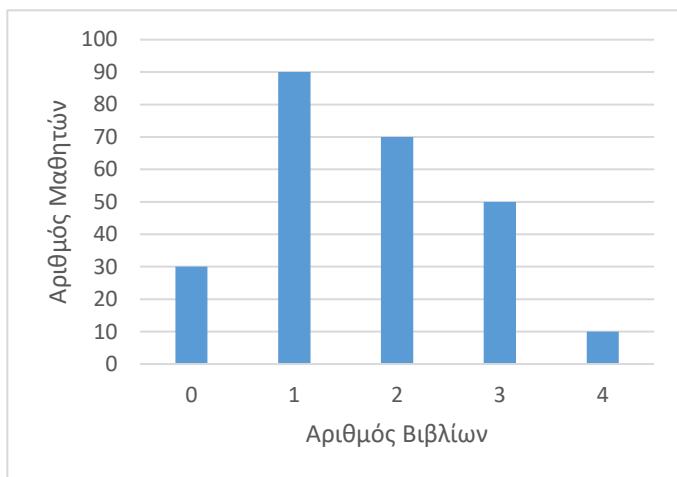
$$\Leftrightarrow \frac{100x}{100} = \frac{80 \cdot 240}{100}$$

$$\Leftrightarrow x = \text{€}192$$

Απ.: Του περίσσεψαν €192.

Ενότητα 11: Στατιστική-Πιθανότητες

1. Στα πλαίσια του σχολικού διαγωνισμού φιλιαναγνωσίας, οι μαθητές του Γυμνασίου Ανθουπόλεως ρωτήθηκαν πόσα βιβλία διάβασαν κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους, με δική τους πρωτοβουλία. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο πιο κάτω ραβδόγραμμα:



Να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα.
 Να κάνετε τις πράξεις όπου χρειάζεται.
 α) Πόσοι ήταν συνολικά οι μαθητές του γυμνασίου που έλαβαν μέρος στην έρευνα;
 β) Πόσοι μαθητές διάβασαν περισσότερα από 2 βιβλία;

α)

| Αριθμός Βιβλίων | Αριθμός μαθητών |
|-----------------|-----------------|
| 0 | 30 |
| 1 | 90 |
| 2 | 70 |
| 3 | 50 |
| 4 | 10 |

Σύνολο: $30+90+70+50+10=250$ μαθητές έλαβαν μέρος στην έρευνα

β) Πρέπει να υπολογίσουμε τους μαθητές που διάβασαν 3 και 4 βιβλία

$50+10=60$ μαθητές διάβασαν περισσότερα από 2 βιβλία

2. Για τις ανάγκες μιας έρευνας ρωτήθηκαν 20 οικογένειες για τον αριθμό των παιδιών που έχουν. Οι πιο κάτω αριθμοί παρουσιάζουν τον αριθμό των παιδιών ανά οικογένεια:

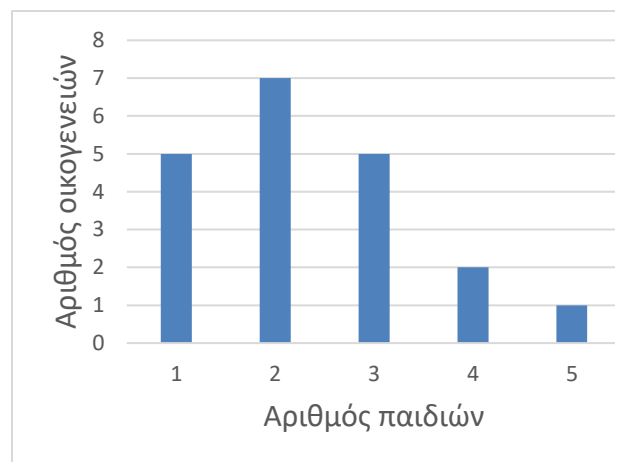
- 2 3 5 1 2 3 3 1 1 4
 1 2 2 4 3 3 1 2 2 2

α) Να κατασκευάσετε:

i) πίνακα συχνοτήτων

| Αριθμός παιδιών | Αριθμός οικογενειών |
|-----------------|---------------------|
| 1 | 5 |
| 2 | 7 |
| 3 | 5 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |

ii) ραβδόγραμμα



i) κυκλικό διάγραμμα



| Αριθμός παιδιών | Αριθμός οικογενειών | Επίκεντρη Γωνία |
|-----------------|---------------------|--|
| 1 | 5 | $\frac{5}{20} \cdot 360^\circ = 90^\circ$ |
| 2 | 7 | $\frac{7}{20} \cdot 360^\circ = 126^\circ$ |
| 3 | 5 | $\frac{5}{20} \cdot 360^\circ = 90^\circ$ |
| 4 | 2 | $\frac{2}{20} \cdot 360^\circ = 36^\circ$ |
| 5 | 1 | $\frac{1}{20} \cdot 360^\circ = 18^\circ$ |

3. Στο διπλανό ραβδόγραμμα φαίνονται τα αποτελέσματα μιας έρευνας που έγινε στους μαθητές του τμήματος Α6, σχετικά με το ποιο είναι το αγαπημένο τους είδος μουσικής.

Να βρείτε:

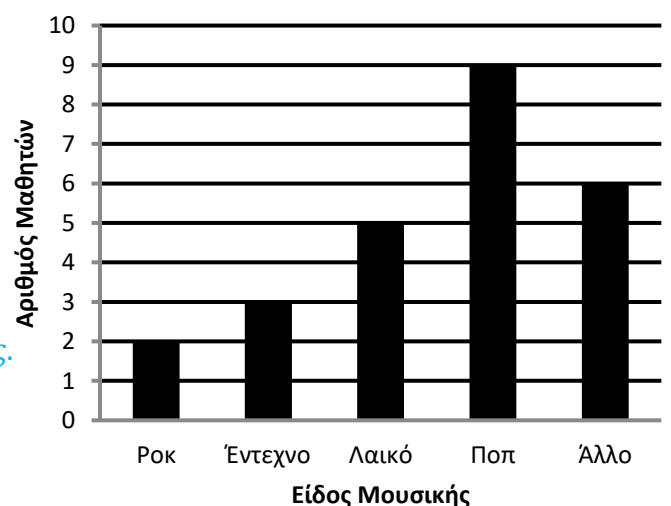
α) Ποιο είδος μουσικής προτιμούν οι περισσότεροι μαθητές.

Απ. : Οι περισσότεροι μαθητές προτιμούν ποπ μουσική.

β) Πόσοι μαθητές προτιμούν το έντεχνο.

Απ. : Το έντεχνο προτιμούν 3 μαθητές.

γ) Ποιός είναι ο πληθυσμός.



Απ. : Ο πληθυσμός είναι οι μαθητές του τμήματος Α6.

δ) Ποιά είναι η μεταβλητή.

Απ.: Η μεταβλητή είναι το αγαπημένο είδος μουσικής των μαθητών.

ε) Το είδος της μεταβλητής.

Απ.: Η μεταβλητή είναι ποιοτική.

στ) Πόσοι μαθητές ρωτήθηκαν;

| Είδος Μουσικής | Αριθμός μαθητών |
|----------------|-----------------|
| Ροκ | 2 |
| Έντεχνο | 3 |
| Λαϊκο | 5 |
| Ποπ | 9 |
| Άλλο | 6 |

Σύνολο μαθητών: $2 + 3 + 5 + 9 + 6 = 25$

Απ. Ρωτήθηκαν 25 μαθητές

ζ) Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του τμήματος.

Να βρείτε την πιθανότητα:

A: ο μαθητής να προτιμά το Λαϊκό;

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

η) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν το Ροκ.

$$\frac{x}{100} = \frac{2}{25} \Leftrightarrow 25 \cdot x = 100 \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{25x}{25} = \frac{100 \cdot 2}{25} \Leftrightarrow x = 8\%$$

4. Η στατιστική υπηρεσία έκανε μια έρευνα σχετικά με το αγαπημένο είδος ταινίας που προτιμούν οι μαθητές της Α΄ τάξης ενός Γυμνασίου. Αφού κατέγραψαν τις απαντήσεις των 72 μαθητών, παρουσίασαν τα αποτελέσματα τους στο πιο κάτω κυκλικό διάγραμμα.



α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των μαθητών που προτιμούν το κάθε είδος ταινίας.

- **Ιστορικά**

$$\frac{50^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{x}{72} \Leftrightarrow 360^{\circ} \cdot x = 50^{\circ} \cdot 72 \Leftrightarrow \frac{360^{\circ}x}{360^{\circ}} = \frac{3600}{360^{\circ}} \Leftrightarrow x = 10$$

- **Περιπέτεια**

$$\frac{120^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{x}{72} \Leftrightarrow 360^{\circ} \cdot x = 120^{\circ} \cdot 72 \Leftrightarrow \frac{360^{\circ}x}{360^{\circ}} = \frac{8640}{360^{\circ}} \Leftrightarrow x = 24$$

- **Κινούμενα Σχέδια**

$$\frac{90^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{x}{72} \Leftrightarrow 360^{\circ} \cdot x = 90^{\circ} \cdot 72 \Leftrightarrow \frac{360^{\circ}x}{360^{\circ}} = \frac{6480}{360^{\circ}} \Leftrightarrow x = 18$$

- **Επιστημονική Φαντασία**

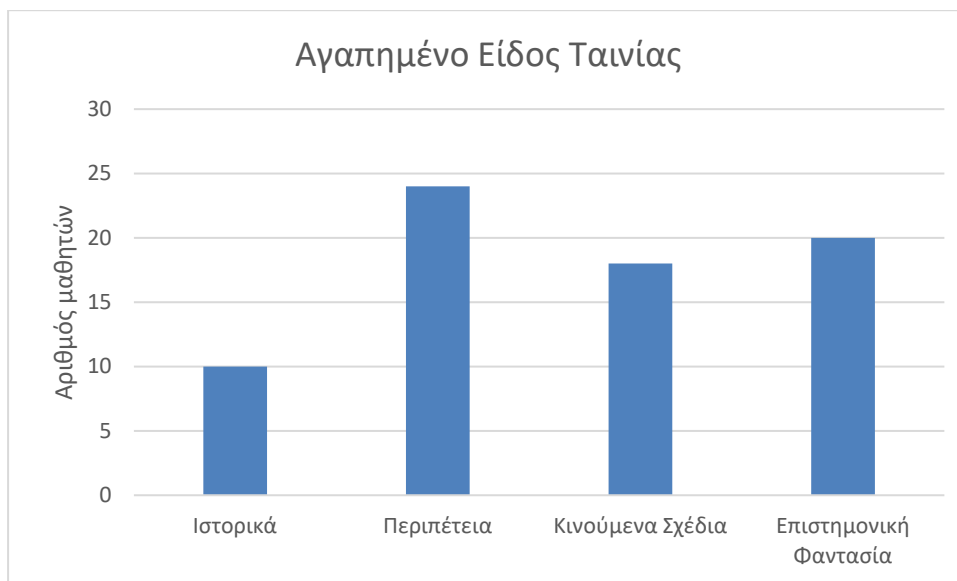
$$\text{Επίκεντρη γωνία} = 360^{\circ} - (120^{\circ} + 50^{\circ} + 90^{\circ}) = 360^{\circ} - 260^{\circ} = 100^{\circ}$$

$$\frac{100^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{x}{72} \Leftrightarrow 360^{\circ} \cdot x = 100^{\circ} \cdot 72 \Leftrightarrow \frac{360^{\circ}x}{360^{\circ}} = \frac{7200}{360^{\circ}} \Leftrightarrow x = 20$$

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

| Αγαπημένο είδος Ταινίας | Αριθμός Μαθητών |
|-------------------------|-----------------|
| Ιστορικά | 10 |
| Περιπέτεια | 24 |
| Κινούμενα Σχέδια | 18 |
| Επιστημονική Φαντασία | 20 |
| Σύνολο | 72 |

γ) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.



δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν τις ταινίες κινουμένων σχεδίων.

$$\frac{x}{100} = \frac{18}{72} \Leftrightarrow 72 \cdot x = 18 \cdot 100 \Leftrightarrow \frac{72x}{72} = \frac{18 \cdot 100}{72} \Leftrightarrow x = 25\%$$

ε) Επιλέγω στην τύχη ένα μαθητή. Ποια η πιθανότητα ο μαθητής αυτός να μην προτιμά τις ταινίες επιστημονικής φαντασίας;

A: Ο μαθητής δεν προτιμά ταινίες επιστημονικής φαντασίας, $n(A) = 52$

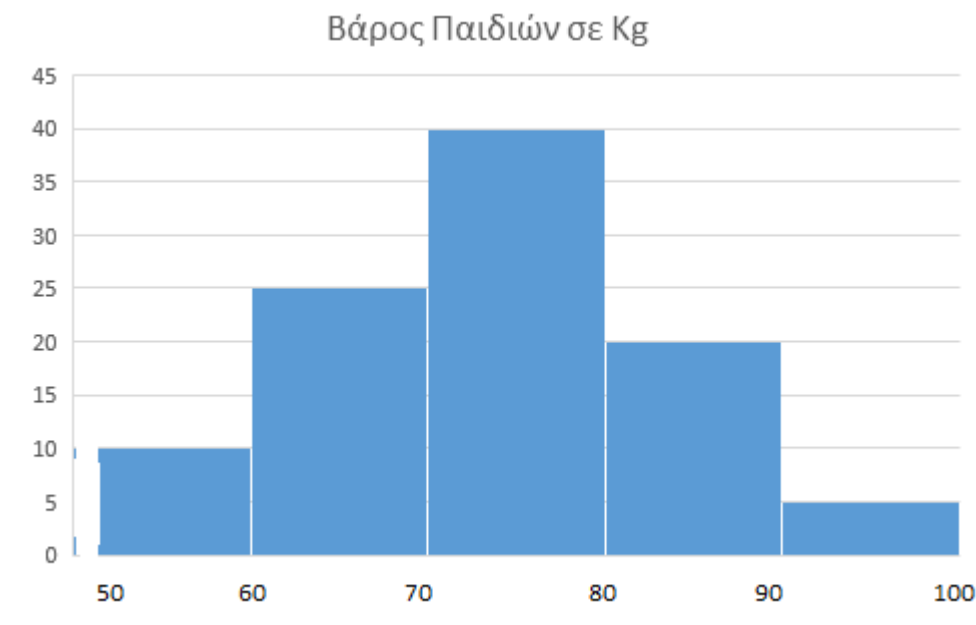
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{52}{72} = \frac{13}{18}$$

5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει το βάρος των μαθητών της Α' Γυμνασίου ενός σχολείου.

| Βάρος παιδιών(Kg) | Αριθμός παιδιών |
|-------------------|-----------------|
| Από 50 μέχρι 60 | 10 |
| Από 60 μέχρι 70 | 25 |
| Από 70 μέχρι 80 | 40 |
| Από 80 μέχρι 90 | 20 |

| | |
|------------------|---|
| Από 90 μέχρι 100 | 5 |
|------------------|---|

α) Να παρουσιάσετε τα πιο πάνω δεδομένα σε ένα ιστόγραμμα.



β) Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βάρος τουλάχιστον 70 kg.

Πρέπει να βρούμε τους μαθητές που έχουν βάρος από 70kg και πάνω.
 $40+20+5=65$ μαθητές

6. Ένα σχολείο θα επιλέξει τυχαία μια εργάσιμη μέρα της εβδομάδας για να επισκεφτεί ένα αρχαιολογικό χώρο.

α) Να καταγράψετε το δειγματικό χώρο του πιο πάνω πειράματος.

$$\Omega = \{\text{Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή}\} \quad \nu(\Omega) = 5$$

β) Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα η επίσκεψη να γίνει μέρα Κυριακή;

A: η επίσκεψη να γίνει μέρα Κυριακή,

$$A = \{\} \quad \nu(A) = 0$$

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{0}{5} = 0$$

γ) Ποια η πιθανότητα η επίσκεψη να γίνει Δευτέρα ή Πέμπτη;

B: η επίσκεψη να γίνει Δευτέρα ή Πέμπτη

$$B = \{\text{Δευτέρα, Πέμπτη}\} \quad \nu(B) = 2$$

$$P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{2}{5}$$

7. Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A : η ένδειξη να είναι 4

B: η ένδειξη να είναι **πρώτος** αριθμός

Γ: η ένδειξη να είναι **περιττός** αριθμός

Δ: η ένδειξη να είναι **διψήφιος** αριθμός

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad v(\Omega) = 6$$

- $A = \{4\} \quad v(A) = 1$

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

- $B = \{2, 3, 5\} \quad v(B) = 3$

$$P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- $\Gamma = \{1, 3, 5\} \quad v(\Gamma) = 3$

$$P(\Gamma) = \frac{v(\Gamma)}{v(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- $\Delta = \{ \} \quad v(\Delta) = 0$

$$P(\Delta) = \frac{v(\Delta)}{v(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$

8. Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 16 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 16. Η Εβελίνα θα επιλέξει μια μπάλα στην τύχη από το κιβώτιο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα:

A: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι ζυγός.

B: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι πολλαπλάσιο του 4.

Γ: Ο αριθμός στην μπάλα να διαιρείται με το 5.

Δ: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι μικρότερος του 12.

E: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι μεγαλύτερος του 17.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\} \quad v(\Omega) = 16$$

- $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \quad v(A) = 8$

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

- $B = \{4, 8, 12, 16\} \quad v(B) = 4$

$$P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

- $\Gamma = \{5, 10, 15\} \quad v(\Gamma) = 3$

$$P(\Gamma) = \frac{v(\Gamma)}{v(\Omega)} = \frac{3}{16}$$

- $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \quad v(\Delta) = 11$

$$P(\Delta) = \frac{\nu(\Delta)}{\nu(\Omega)} = \frac{11}{16}$$

- $E = \{ \} \quad \nu(E) = 0$

$$P(E) = \frac{\nu(E)}{\nu(\Omega)} = \frac{0}{16} = 0$$

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΝΘΟΥΠΟΛΕΩΣ