ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΝΘΟΥΠΟΛΕΩΣ ***ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2024-2025***

ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ενότητα 1: Πραγματικοί αριθμοί

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2^3\cdot 2^2 + 3^5 \div 3^3 - 5^0 = 2^5 + 3^2 - 5^0 = 32 + 9 - 1 = 41 - 1 = 40$

β) $5\cdot 2^3 - 7\cdot(-2)^2 + (-3)^0 = 5\cdot 8 - 7\cdot(+4) + 1 = 40 - 28 + 1 = 12 + 1 = 13$

γ) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + (-5)^0 + 1^{-18} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{4}{9} + 1 + 1^{18} = \frac{64}{27} - \frac{4}{9} + 1 + 1 =$

$= \frac{64}{27} - \frac{12}{27} + 1 + 1 = \frac{52}{27} + 2 = 1\frac{25}{27} + 2 = 3\frac{25}{27}$

δ) $(-2)^3 + 16\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2} - 3(-1)^7(-5)^0 - 3^2 \div (-4+3) =$

$= (-8) + 16\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3\cdot(-1)\cdot 1 - 9 \div (-1) = (-8) + 16\cdot\left(+\frac{9}{16}\right) + 3 + 9 =$

$= -8 + 9 + 3 + 9 = -8 + 21 = +13$

2. Να γράψετε υπό μορφή μίας δύναμης με θετικό εκθέτη τις παραστάσεις:

α) $(-5)^3\cdot(-5)\cdot(-5)^4 = (-5)^{3+1+4} = (-5)^8$

β) $[(-3)^{-4}]^2 = (-3)^{(-4)\cdot 2} = (-3)^{-8} = \left(-\frac{1}{3}\right)^8$

γ) $\alpha^{12} \div \alpha^{12} = \alpha^{12-12} = \alpha^0$

δ) $(+7) \div (+7)^{-4} = (+7)^{1-(-4)} = (+7)^{1+(+4)} = (+7)^5$

ε) $(-7)^2 \div (+7)^3 = (+7)^2 \div (+7)^3 = (+7)^{2-3} = (+7)^{-1} = \left(+\frac{1}{7}\right)^1$

στ) $(+9)^2\cdot(-27)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = [(+3)^2]^2\cdot(-3)^3\cdot(-3)^2 = (+3)^4\cdot(-3)^3\cdot(-3)^2 =$

$= (-3)^4\cdot(-3)^3\cdot(-3)^2 = (-3)^{4+3+2} = (-3)^9$

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με το αντίστοιχο αποτέλεσμα της στήλης Β.

Α	Β
1) $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{100}$	α. -8
2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$	β. 8
3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$	γ. 10
4) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$	δ. 4
5) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$	ε. 3
6) $\left(\sqrt{10}\right)^2$	στ. 15
7) $\sqrt{(-8)^2}$	ζ. 5
	η. -3
	θ. 6
	ι. -4

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
στ	δ	θ	ζ	ε	γ	β

4. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

α) $\boldsymbol{\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^{-1}}$ **αν** $\boldsymbol{a=-2,\beta=\frac{1}{3}}$

$\boldsymbol{\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^{-1}} = (-2)^2\frac{1}{3} - 3\cdot(-2)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{4}{3} - 3(-2)\cdot 3^1 =$

$= \frac{4}{3} + 6\cdot 3 = \frac{4}{3} + 18 = 1\frac{1}{3} + 18 = 19\frac{1}{3}$

β) $\boldsymbol{\alpha^{-2} - \alpha\beta + 3(\alpha+\beta)^{-1}}$ **αν** $\boldsymbol{a=-2,\beta=5}$

$\boldsymbol{\alpha^{-2} - \alpha\beta + 3(\alpha+\beta)^{-1}} = (-2)^{-2} - (-2)\cdot 5 + 3\cdot[(-2)+5]^{-1} =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-10) + 3\cdot(3)^{-1} = +\frac{1}{4} + 10 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1 =$

$= +\frac{1}{4} + 10 + 3\cdot\frac{1}{3} = +\frac{1}{4} + 10 + 1 = 11\frac{1}{4}$

γ) $\boldsymbol{\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}}$ **αν** $\boldsymbol{a=2,\beta=-3}$

$$\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{2^2+2\cdot 2\cdot(-3)+(-3)^2}{[2+(-3)]^2} = \frac{4+4\cdot(-3)+(+9)}{(-1)^2} = \frac{4-12+9}{+1} = \frac{13-12}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

5. Να υπολογίσετε τους αριθμούς :

α) $\sqrt{\mathbf{16}} = 4$ **β)** $\sqrt{\mathbf{81}} = 9$ **γ)** $\sqrt{\mathbf{4900}} = 70$ **δ)** $\sqrt{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}} = \frac{2}{3}$ **ε)** $\sqrt{\mathbf{1600}} = 40$

στ) $\sqrt{\mathbf{1,44}} = 1{,}2$ **ζ)** $\sqrt{\mathbf{1,21}} = 1{,}1$ **η)** $\sqrt{(\mathbf{-29})^{\mathbf{2}}} = |-29| = 29$ **θ)** $\sqrt[3]{\mathbf{1000}} = 10$

ι) $\sqrt[3]{\mathbf{64}} = 4$ **κ)** $\sqrt[3]{\mathbf{8}} = 2$ **λ)** $\left(\sqrt[3]{\mathbf{19}}\right)^{\mathbf{3}} = 19$ **μ)** $\sqrt[3]{\mathbf{0,008}} = 0{,}2$ **ν)** $\sqrt[3]{\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{64}}} = \frac{3}{4}$

ξ) $\sqrt[3]{\mathbf{5\cdot 5\cdot 5}} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\sqrt{\mathbf{7}+\sqrt[3]{\mathbf{8}}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$

β) $\sqrt[3]{\mathbf{125}} + \sqrt{(\mathbf{-5})^{\mathbf{2}}} + \sqrt[3]{\mathbf{5^3}} = 5 + |-5| + 5 =$
$= 5+5+5 = 15$

γ) $\sqrt[3]{\mathbf{9+9+9}} = \sqrt[3]{27} = 3$

δ) $\sqrt{\mathbf{21}+\sqrt{\mathbf{13}+\sqrt{\mathbf{7}+\sqrt{\mathbf{4}}}}} = \sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+2}}} = \sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}} =$
$= \sqrt{21+\sqrt{13+3}} = \sqrt{21+\sqrt{16}} = \sqrt{21+4} = \sqrt{25} = 5$

ε) $\left(\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{7}}\right)^{\mathbf{2}} + \sqrt[3]{\mathbf{125}} - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{9}} = 9\cdot 7 + 5 - 2\cdot 3 = 63 + 5 - 6 = 68 - 6 = 62$

στ) $\sqrt{\mathbf{80}+\sqrt[3]{\mathbf{7}-\sqrt{\mathbf{36}}}} = \sqrt{80+\sqrt[3]{7-6}} = \sqrt{80+\sqrt[3]{1}} = \sqrt{80+1} = \sqrt{81} = 9$

ζ) $\sqrt{\mathbf{3}}\cdot\sqrt{\mathbf{12}} = \sqrt{3\cdot 12} = \sqrt{36} = 6$ **η)** $\frac{\sqrt{\mathbf{28}}}{\sqrt{\mathbf{7}}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$

θ) $\frac{\sqrt[3]{\mathbf{18}}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{3}}}{\sqrt[3]{\mathbf{2}}} = \sqrt[3]{\frac{18\cdot 3}{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$ **ι)** $\sqrt[3]{\mathbf{2^3\cdot 4^3}} = \sqrt[3]{(2\cdot 4)^3} = \sqrt[3]{8^3} = 8$

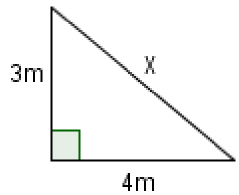
κ) $\left(\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{20}}\right)\left(\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{5}}\right) = 3\cdot 4\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{5} = 12\cdot\sqrt{20\cdot 5} = 12\cdot\sqrt{100} = 12\cdot 10 = 120$

λ) $\sqrt{\mathbf{2}}\left(\sqrt{\mathbf{18}}-\sqrt{\mathbf{72}}\right) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{18} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{72} = \sqrt{2\cdot 18} - \sqrt{2\cdot 72} = \sqrt{36} - \sqrt{144} = 6 - 12 = -6$

μ) $\sqrt{\mathbf{24}}\div\sqrt{\mathbf{6}} - \sqrt[3]{\mathbf{16}}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{4}} = \sqrt{24\div 6} - \sqrt[3]{16\cdot 4} = \sqrt{4} - \sqrt[3]{64} = 2 - 4 = -2$

7. **Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε την τιμή του χ .**

α)



(Π.Θ): $\chi^2 = 3^2+4^2$

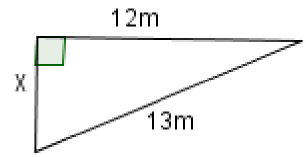
$\Leftrightarrow \chi^2 = 9 + 16$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 25$

$\Leftrightarrow \chi = \sqrt{25}$

$\Leftrightarrow \chi = 5m$

β)



(Π.Θ): $13^2 = \chi^2+12^2$

$\Leftrightarrow 169 = \chi^2 + 144$

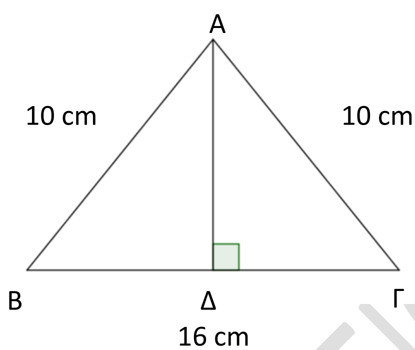
$\Leftrightarrow \chi^2 = 169 - 144$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 25$

$\Leftrightarrow \chi = \sqrt{25}$

$\Leftrightarrow \chi = 5m$

8. **Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο κάτω σχήματος :**



$\varDelta\varGamma = \frac{B\varGamma}{2} = \frac{16}{2} = 8cm$

(Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΔΓ) : $(A\varGamma)^2 = (A\varDelta)^2+(\varDelta\varGamma)^2$

$\Leftrightarrow 10^2 = \upsilon^2+8^2$

$\Leftrightarrow 100 = \upsilon^2 + 64$

$\Leftrightarrow \upsilon^2 = 100 - 64$

$\Leftrightarrow \upsilon^2 = 36$

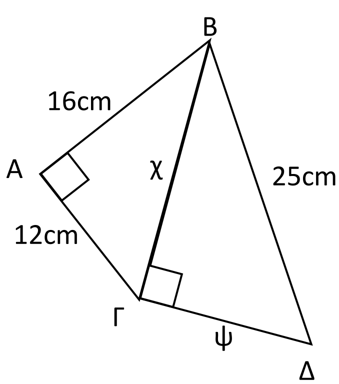
$\Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{36} = 6cm$

(ΑΔ ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του

άρα και διάμεσος)

$\text{Ε}_{\text{τριγώνου}} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{16 \cdot 6}{2} = \frac{96}{2} = 48cm^2$

9. **Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τις τιμές των χ και ψ.**



(Π.Θ.στο τρίγωνο ΑΒΓ) $(B\varGamma)^2 = (AB)^2+(A\varGamma)^2$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 16^2+12^2$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 256 + 144$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 400$

$\Leftrightarrow \chi = \sqrt{400}$

$\Longleftrightarrow$

$\chi = 20$ cm

(Π.Θ. στο τρίγωνο ΒΓΔ) $(B\Delta)^2 = (\Gamma B)^2 + (\Gamma\Delta)^2$

$\Longleftrightarrow 25^2 = 20^2 + \psi^2$

$\Longleftrightarrow 625 = 400 + \psi^2$

$\Longleftrightarrow \psi^2 = 625 - 400$

$\Longleftrightarrow \psi^2 = 225$

$\Longleftrightarrow \psi = \sqrt{225}$

$\Longleftrightarrow \psi = 15$ cm

10. **Αν α =** $\sqrt{3 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}}$ **, β =** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}$ **και γ =** $\sqrt{9 - \sqrt{21 + \sqrt{16}}}$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α , β , γ.

α = $\sqrt{3 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}} = \sqrt{3 - \sqrt{7 - 3}} = \sqrt{3 - \sqrt{4}} = \sqrt{3 - 2} = \sqrt{1} = 1$

β = $\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$

γ = $\sqrt{9 - \sqrt{21 + \sqrt{16}}} = \sqrt{9 - \sqrt{21 + 4}} = \sqrt{9 - \sqrt{25}} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β , γ είναι ορθογώνιο.

$\alpha^2 = 1^2 = 1$, $\beta^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ $\gamma^2 = 2^2 = 4$

Παρατηρούμε ότι $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2$ άρα ικανοποιείται το Πυθαγόρειο θεώρημα άρα το τρίγωνο με πλευρές α, β , γ είναι ορθογώνιο.

11. **Να χαρακτηρίσετε με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις πιο κάτω προτάσεις :**

α) Αν χ, ψ, ζ είναι οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και ισχύει $\chi^2 = \psi^2 - \zeta^2$, τότε η πλευρά ψ είναι η υποτείνουσα. **Σ**

β) Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{B} = 90°$, τότε $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$. **Λ**

γ) Ισχύει $\sqrt{(-\chi)^2} = |\chi|$ για οποιοδήποτε ρητό χ. **Σ**

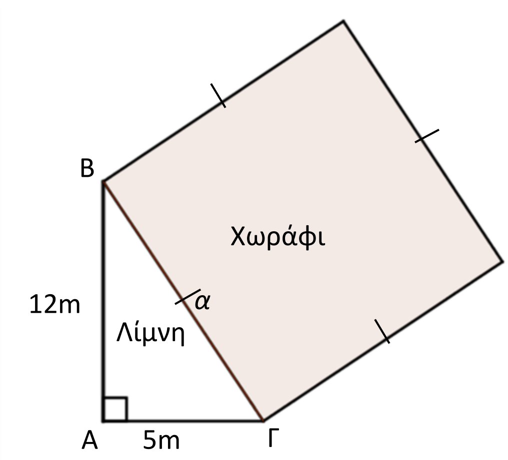
δ) Ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ όταν α ≥ 0 και β ≥ 0. **Λ**

ε) Ισχύει $\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 200$. **Σ**

12. Να βάλετε χ ή √ στην κατάλληλη στήλη:

Αριθμός	Φυσικός N	Ακέραιος Z	Ρητός Q	Άρρητος R-Q	Πραγματικός R
1,25	χ	χ	√	χ	√
$-\sqrt{9}$	χ	√	√	χ	√
$\sqrt{6}$	χ	χ	χ	√	√
$\frac{12}{7}$	χ	χ	√	χ	√

13. Ο κ. Αντώνης θέλει να περιφράξει με μεταλλικό σύρμα το χωράφι του, σχήματος τετραγώνου, το οποίο βρίσκεται δίπλα από μια λίμνη όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν το μεταλλικό σύρμα στοιχίζει €5 το μέτρο , να βρείτε πόσα θα του στοιχίσει η περίφραξη. . (η απάντηση σας να δοθεί κατά προσέγγιση ακέραιας μονάδας



(Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΓ): $(Β\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$

$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 12^2 + 5^2$

$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 144 + 25$

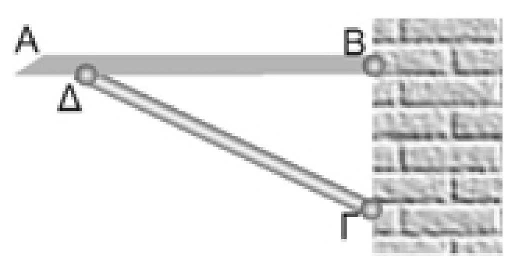
$\Leftrightarrow \alpha^2 = 169 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \sqrt{169}$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = 13m$

Πτετραγώνου$= 4\alpha = 4 \cdot 13 = 52m$

Κόστος Περίφραξης$= 52 \cdot 5 = 260€$

14. Ένας μαθητής δίπλα από το γραφείο του στον κατακόρυφο τοίχο ,τοποθέτησε ένα ράφι με μεταλλικό στήριγμα για να βάλει επάνω την κεντρική μονάδα του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αν το στήριγμα ΓΔ έχει μήκος 26 cm, η κατακόρυφη απόσταση ΒΓ είναι 10 cm και τα σημεία Β, Δ απέχουν 24 cm, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



Για να είναι οριζόντιο θα πρέπει $AB \perp B\Gamma$. Θα εξετάσουμε επομένως αν το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\mathrm{B}} = 90°$

$(BΔ)^2 = 24^2 = 576,$ $(ΓΔ)^2 = 26^2 = 676$ $(BΓ)^2 = 10^2 = 100$

Παρατηρούμε ότι $676 = 576 + 100$ δηλαδή $(ΓΔ)^2 = (BΔ)^2 + (BΓ)^2$, άρα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, άρα το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\widehat{B} = 90°$.
Το ράφι επομένως είναι οριζόντιο.

Ενότητα 2: Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Ποιες από τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα ;

$\alpha)\ 5\chi\psi$ $\quad \beta)\ 4\chi+\chi^2$ $\quad \gamma)\ \frac{2}{5}\chi\psi^3$ $\quad \delta)-\alpha\beta^3$ $\quad \varepsilon)-\frac{4}{7}\chi\alpha^2\beta$ $\quad \sigma\tau)\ \frac{3\chi\omega}{\psi}$

<u>ΛΥΣΗ:</u> $\alpha)\ 5\chi\psi$ $\quad \gamma)\ \frac{2}{5}\chi\psi^3$ $\quad \delta)-\alpha\beta^3$ $\quad \varepsilon)-\frac{4}{7}\chi\alpha^2\beta$

2. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ
$5\chi^3$	5	χ^3
$-\frac{\alpha\beta^2\gamma^3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\alpha\beta^2\gamma^3$
$\frac{3}{5}\chi^2\psi^3$	$\frac{3}{5}$	$\chi^2\psi^3$
$-\psi^2$	-1	ψ^2

3. Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

$\alpha)\ 3\alpha-2\alpha-5\alpha=3\alpha-7\alpha=-4\alpha$

$\beta)\ 2\alpha\beta+7\alpha^2\beta-12\alpha^2\beta+\alpha\beta=2\alpha\beta+\alpha\beta+7\alpha^2\beta-12\alpha^2\beta=3\alpha\beta-5\alpha^2\beta$

$\gamma)\ \chi\psi^2+\frac{1}{2}\chi\psi^2-\frac{3}{4}\chi\psi^2=\frac{4}{4}\chi\psi^2+\frac{2}{4}\chi\psi^2-\frac{3}{4}\chi\psi^2=\frac{6}{4}\chi\psi^2-\frac{3}{4}\chi\psi^2=\frac{3}{4}\chi\psi^2$

$\delta)-2\alpha\beta+4\beta^2-3\beta\alpha=4\beta^2-2\alpha\beta-3\alpha\beta=4\beta^2-5\alpha\beta$

$\varepsilon)\ 3(-4\chi^2)=-12\chi^2$

$\sigma\tau)\ (-2\alpha^4)(-5\alpha^2\beta)=10\alpha^6\beta$

$\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$

$\zeta)\ 5(-2\chi)(3\chi\psi^4)(-\psi^5)=(-10\chi)(-3\chi\psi^9)=30\chi^2\psi^9$

$\eta)\ \left(\frac{2}{3}\chi^3\right)^2 \cdot 2\chi = \frac{2^2}{3^2}(\chi^3)^2 \cdot 2\chi = \frac{4}{9}\chi^6 . 2\chi = \frac{8}{9}\chi^7$

$(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$

$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

$(\alpha : \beta)^\nu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

$\theta)\ (-8\alpha^3\beta) : (-4\alpha\beta) = 2\alpha^2\beta^0 = 2\alpha^2$

$\iota)\ (15\kappa^2\lambda^5) : (5\kappa^3\lambda^7) = \frac{15\kappa^2\lambda^5}{5\kappa^3\lambda^7} = \frac{3}{\kappa\lambda^2}$

$\iota\alpha)\ 2\chi^2(3\chi - 2\psi) = 6\chi^3 - 4\chi^2\psi$

$\iota\beta)\ 3\chi(\chi^2 - 2\chi + 1) = 3\chi^3 - 6\chi^2 + 3\chi$

$\iota\gamma)\ (t^2 + 2t - 3) - (3t + 4) = t^2 + 2t - 3 - 3t - 4 = t^2 + 2t - 3t - 3 - 4 = t^2 - t - 7$

$\iota\delta)\ 2\chi^3 - (3\chi^4 - \chi^3) - 2\chi^2 + 5\chi^4 - 3 = 2\chi^3 - 3\chi^4 + \chi^3 - 2\chi^2 + 5\chi^4 - 3$

$= 5\chi^4 - 3\chi^4 + 2\chi^3 + \chi^3 - 2\chi^2 - 3$

$= 2\chi^4 + 3\chi^3 - 2\chi^2 - 3$

$\iota\varepsilon)\ (\chi - 2)(\chi + 3) = \chi^2 + 3\chi - 2\chi - 6 = \chi^2 + \chi - 6$

$\iota\sigma\tau)\ (2\psi + 3)(\psi^2 - 1) = 2\psi^3 + 3\psi^2 - 2\psi - 3$

$\iota\zeta)\ \chi(\chi + 1)(2\chi - 1) = (\chi^2 + \chi)(2\chi - 1) = 2\chi^3 - \chi^2 + 2\chi^2 - \chi = 2\chi^3 + \chi^2 - \chi$

$\iota\eta)\ 2\chi^2 - (\chi + 2)(\chi - 2) = 2\chi^2 - (\chi^2 - 2\chi + 2\chi - 4)$

$= 2\chi^2 - \chi^2 + 2\chi - 2\chi + 4$

$= \chi^2 + 4$

$\iota\theta)\ 2\chi(3\chi - \chi^2 + 5) - 3(\chi - 1) + 4 = 6\chi^2 - 2\chi^3 + 10\chi - 3\chi + 3 + 4$

$= -2\chi^3 + 6\chi^2 + 7\chi + 7$

$\kappa)\ (4\chi - 1)(\chi - 2) - (\chi + 1)^2 = 4\chi^2 - 8\chi - 1\chi + 2 - (\chi + 1)(\chi + 1)$

$= 4\chi^2 - 8\chi - 1\chi + 2 - (\chi^2 + \chi + \chi + 1)$

$= 4\chi^2 - 8\chi - 1\chi + 2 - \chi^2 - \chi - \chi - 1$

$= 4\chi^2 - \chi^2 - 8\chi - 1\chi - \chi - \chi + 2 - 1$

$= 3\chi^2 - 11\chi + 1$

$\kappa\alpha)\ \frac{4\chi\psi-8\chi^2\psi}{2\chi\psi}=\frac{4\chi\psi}{2\chi\psi}-\frac{8\chi^2\psi}{2\chi\psi}=2-4\chi$

$\kappa\beta)\ (4\alpha\beta^2-3\beta^3+8\alpha\beta)\div(2\beta)=\frac{4\alpha\beta^2-3\beta^3+8\alpha\beta}{2\beta}=\frac{4\alpha\beta^2}{2\beta}-\frac{3\beta^3}{2\beta}+\frac{8\alpha\beta}{2\beta}=2\alpha\beta-\frac{3\beta^2}{2}+4\alpha$

$\kappa\gamma)\ \frac{16\chi^4\psi^3-8\chi^3\psi+4\chi\psi}{-4\chi^2\psi}=\frac{16\chi^4\psi^3}{-4\chi^2\psi}-\frac{8\chi^3\psi}{-4\chi^2\psi}+\frac{4\chi\psi}{-4\chi^2\psi}=-4\chi^2\psi^2+2\chi-$

$\frac{1}{\chi}$ $\kappa\delta)\ (\chi^2-5\chi+6):(\chi-3)$

$\chi^2-5\chi+6$	$\chi-3$
$-\chi^2+3\chi$	$\chi-2$
$-2\chi+6$	
$2\chi-6$	
0	

$\frac{\chi^2}{\chi}=\chi\ ,\chi(\chi-3)=\chi^2-3\chi\ \Rightarrow\ -(\chi^2-3\chi)=-\chi^2+3\chi$

$\frac{-2\chi}{\chi}=-2\ ,-2(\chi-3)=-2\chi+6\Rightarrow-(-2\chi+6)=2\chi-6$

$\kappa\varepsilon)\ (\psi^2+3\psi+2):(\psi+1)$

$\psi^2+3\psi+2$	$\psi+1$
$-\psi^2-\psi$	$\psi+2$
$2\psi+2$	
$-2\psi-2$	
0	

$\frac{\psi^2}{\psi}=\psi\ ,\psi(\psi+1)=\psi^2+\psi\ \Rightarrow\ -(\psi^2+\psi)=-\psi^2-\psi$

$\frac{2\psi}{\psi}=2\ ,2(\psi+1)=2\psi+2\Rightarrow-(2\psi+2)=-2\psi-2$

$\kappa\sigma\tau)\ (4\chi^2-12\chi+9):(2\chi-3)$

$4\chi^2-12\chi+9$	$2\chi-3$
$-4\chi^2+6\chi$	$2\chi-3$
-6χ+9	
6χ - 9	

$\frac{4\chi^2}{2\chi}=2\chi\ ,2\chi(2\chi-3)=4\chi^2-6\chi\ \Rightarrow-(4\chi^2-6\chi)=-4\chi^2+6\chi$

$\frac{-6\chi}{2\chi}=-3\ ,-3(2\chi-3)=-6\chi+9\Rightarrow-(-6\chi+9)=6\chi-9$

$\kappa\zeta)\ (6\alpha^2+7\alpha+5):(3\alpha+2)$

$$
\begin{array}{r|l}
6\alpha^2+7\alpha+5 & 3\alpha+2 \\ \hline
-6\alpha^2-4\alpha & 2\alpha+1 \\ \hline
3\alpha+5 & \\
-3\alpha-2 & \\ \hline
3 &
\end{array}
$$

$\frac{6\alpha^2}{3\alpha}=2\alpha\ \ ,2\alpha(3\alpha+2)=6\alpha^2+4\alpha\ \Rightarrow\ -(6\alpha^2+4\alpha)=$

$=-6\alpha^2-4\alpha$

$\frac{3\alpha}{3\alpha}=1\ \ ,1(3\alpha+2)=3\alpha+2\ \Rightarrow -(3\alpha+2)=-3\alpha-2$

4. Δίνονται τα μονώνυμα $A=\frac{1}{4}\chi^6\psi^5$ και $B=-\frac{1}{2}\chi^4\psi^2$

α) Να βρείτε το πηλίκο $\frac{A}{B}$.

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{1}{4}\chi^6\psi^5}{-\frac{1}{2}\chi^4\psi^2}=-\frac{1\cdot 2}{1\cdot 4}\chi^{6-4}\psi^{5-2}=-\frac{2}{4}\chi^2\psi^3=-\frac{1}{2}\chi^2\psi^3$$

β) Αν το μονώνυμο $8\chi^{\mu-3}\psi^{2\lambda+1}$ είναι όμοιο με το πιο πάνω πηλίκο να βρείτε τις τιμές των μ και λ.

Το μονώνυμο $8\chi^{\mu-3}\psi^{2\lambda+1}$ είναι όμοιο με το $-\frac{1}{2}\chi^2\psi^3$ όταν έχουν ίδιο κύριο μέρος.

Δηλαδή: $\chi^{\mu-3}\psi^{2\lambda+1}=\chi^2\psi^3$ άρα : $\chi^{\mu-3}=\chi^2\ \Leftrightarrow \mu-3=2 \Leftrightarrow \mu=3+2 \Leftrightarrow \mu=5$

$\alpha^\mu=\alpha^\nu \Leftrightarrow \mu=\nu$

και $\psi^{2\lambda+1}=\psi^3 \Leftrightarrow 2\lambda+1=3 \Leftrightarrow 2\lambda=3-1$

$\Leftrightarrow 2\lambda=2 \Leftrightarrow \frac{2\lambda}{2}=\frac{2}{2} \Leftrightarrow \lambda=1$

5. i) Δίνονται τα πολυώνυμα $\rho(\chi)=2\chi^2-3\chi+1$ και $\sigma(\chi)=2\chi-1$.

Να υπολογίσετε:

α) $\rho(\chi)+\sigma(\chi)=2\chi^2-3\chi+1+2\chi-1=2\chi^2-3\chi+2\chi+1-1=2\chi^2-\chi$

β) $2\rho(\chi)-\chi\sigma(\chi)=2(2\chi^2-3\chi+1)-\chi(2\chi-1)=4\chi^2-6\chi+2-2\chi^2+\chi$

$=4\chi^2-2\chi^2-6\chi+\chi+2$

$=2\chi^2-5\chi+2$

γ) $[\sigma(\chi)]^2=(2\chi-1)^2=(2\chi-1)(2\chi-1)$

$= 4\chi^2 - 2\chi - 2\chi + 1$

$= 4\chi^2 - 4\chi + 1$

δ) $\rho(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 1 = 2 \cdot 4 + 6 + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$

ε) $\sigma(\chi) \cdot \rho(\chi) = (2\chi - 1)(2\chi^2 - 3\chi + 1) = 4\chi^3 - 6\chi^2 + 2\chi - 2\chi^2 + 3\chi - 1$

$= 4\chi^3 - 6\chi^2 - 2\chi^2 + 2\chi + 3\chi - 1$

$= 4\chi^3 - 8\chi^2 + 5\chi - 1$

στ) $\rho(\chi) : \sigma(\chi) = (2\chi^2 - 3\chi + 1) \div (2\chi - 1)$

$$\begin{array}{l|l} 2\chi^2 - 3\chi + 1 & 2\chi - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-2\chi^2 + \chi} & \chi - 1 \\ \quad -2\chi + 1 & \\ \quad \underline{2\chi - 1} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$\frac{2\chi^2}{2\chi} = \chi$, $\chi(2\chi - 1) = 2\chi^2 - \chi \Rightarrow -(2\chi^2 - \chi) = -2\chi^2 + \chi$

$\frac{-2\chi}{2\chi} = -1$, $-1(2\chi - 1) = -2\chi + 1 \Rightarrow -(-2\chi + 1) = 2\chi - 1$

ii) Ο ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2\chi^2 + 7\chi - 15$ είναι το $2\chi - 3$. Να βρείτε τον άλλο παράγοντα.

ΛΥΣΗ:

$(2\chi^2 + 7\chi - 15) : (2\chi - 3)$

$$\begin{array}{l|l} 2\chi^2 + 7\chi - 15 & 2\chi - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2\chi^2 + 3\chi} & \chi + 5 \\ \quad 10\chi - 15 & \\ \quad \underline{-10\chi + 15} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$\frac{2\chi^2}{2\chi} = \chi$, $\chi(2\chi - 3) = 2\chi^2 - 3\chi \Rightarrow -(2\chi^2 - 3\chi) =$

$= -2\chi^2 + 3\chi$

$\frac{10\chi}{2\chi} = 5$, $5(2\chi - 3) = 10\chi - 15 \Rightarrow -(10\chi - 15) = -10\chi + 15$

Ο άλλος παράγοντας είναι το πολυώνυμο $\chi + 5$

iii) Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρεθεί με το $2\chi - 1$ δίνει πηλίκο $\chi^2 - 3\chi + 2$ και αφήνει υπόλοιπο -8.

$\Delta(\chi) = ?$

$\delta(\chi) = 2\chi - 1$

$\pi(\chi) = \chi^2 - 3\chi + 2$

$\upsilon(\chi) = -8$

$$\begin{aligned}\Delta(\chi) &= \delta(\chi)\cdot\pi(\chi) + \upsilon(\chi)\\ &= (2\chi - 1)(\chi^2 - 3\chi + 2) + (-8)\\ &= 2\chi^3 - 6\chi^2 + 4\chi - \chi^2 + 3\chi - 2 - 8\\ &= 2\chi^3 - 6\chi^2 - \chi^2 + 4\chi + 3\chi - 2 - 8\\ &= 2\chi^3 - 7\chi^2 + 7\chi - 10\end{aligned}$$

6. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A = 5\psi^3 - 21\psi^2 + 19\psi - 3, \quad B = 5\psi - 1, \quad \Gamma = -5\psi^2 - 4\psi - 4$$

Να βρείτε:

$$\begin{aligned}\alpha)\ A + B - \Gamma &= 5\psi^3 - 21\psi^2 + 19\psi - 3 + 5\psi - 1 - (-5\psi^2 - 4\psi - 4)\\ &= 5\psi^3 - 21\psi^2 + 19\psi - 3 + 5\psi - 1 + 5\psi^2 + 4\psi + 4\\ &= 5\psi^3 - 21\psi^2 + 5\psi^2 + 19\psi + 5\psi + 4\psi - 3 - 1 + 4\\ &= 5\psi^3 - 16\psi^2 + 28\psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta)\ B.\Gamma &= (5\psi - 1)(-5\psi^2 - 4\psi - 4)\\ &= -25\psi^3 - 20\psi^2 - 20\psi + 5\psi^2 + 4\psi + 4\\ &= -25\psi^3 - 20\psi^2 + 5\psi^2 - 20\psi + 4\psi + 4\\ &= -25\psi^3 - 15\psi^2 - 16\psi + 4\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\gamma)}$ $\mathbf{5B - 2\Gamma} = 5(5\psi - 1) - 2(-5\psi^2 - 4\psi - 4)$

$= 25\psi - 5 + 10\psi^2 + 8\psi + 8$

$= 10\psi^2 + 25\psi + 8\psi + 8 - 5$

$= 10\psi^2 + 33\psi + 3$

$\boldsymbol{\delta)}$ $\boldsymbol{\Gamma : B} = (-5\psi^2 - 4\psi - 4) : (5\psi - 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
-5\psi^2 - 4\psi - 4 & 5\psi - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{5\psi^2 - \psi} & -\psi - 1 \\
-5\psi - 4 & \\
\underline{5\psi - 1} & \\
-5 &
\end{array}
$$

$\frac{-5\psi^2}{5\psi} = -\psi$, $-\psi(5\psi - 1) = -5\psi^2 + \psi \Rightarrow -(-5\psi^2 + \psi) =$

$= 5\psi^2 - \psi$

$\frac{-5\psi}{5\psi} = -1$, $-1(5\psi - 1) = -5\psi + 1 \Rightarrow -(-5\psi + 1) = 5\psi - 1$

7. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

$\boldsymbol{\alpha)}$ $\mathbf{(2\alpha - 3)^2 - 4\alpha(\alpha - 3) - \alpha^2 = (3 - \alpha)(3 + \alpha)}$

$A'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = (2\alpha - 3)^2 - 4\alpha(\alpha - 3) - \alpha^2$

$= (2\alpha - 3)(2\alpha - 3) - 4\alpha^2 + 12\alpha - \alpha^2$

$= 4\alpha^2 - 6\alpha - 6\alpha + 9 - 4\alpha^2 + 12\alpha - \alpha^2$

$= 4\alpha^2 - 4\alpha^2 - \alpha^2 - 6\alpha - 6\alpha + 12\alpha + 9$

$= -\alpha^2 + 9$ (1)

$B'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = (3 - \alpha)(3 + \alpha)$

$= 9 + 3\alpha - 3\alpha - \alpha^2$

$= -\alpha^2 + 9$ (2)

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow A'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = B'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma$

$\boldsymbol{\beta)}$ $\mathbf{(\chi + \psi)^2 - 4\chi\psi = (\chi - \psi)^2}$

$A'\ \mu\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma = (\chi + \psi)^2 - 4\chi\psi$

$= (\chi + \psi)(\chi + \psi) - 4\chi\psi$

$= \chi^2 + \chi\psi + \psi\chi + \psi^2 - 4\chi\psi$

$= \chi^2 + \chi\psi + \chi\psi - 4\chi\psi + \psi^2$

$= \chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2 \quad (1)$

B' μέλος $= (\chi - \psi)^2$

$= (\chi - \psi)(\chi - \psi)$

$= \chi^2 - \chi\psi - \psi\chi + \psi^2$

$= \chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow$ A' μέλος $= B'$ μέλος

γ) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 = \alpha(2\beta - \alpha) - 2\alpha(\beta - \alpha)$

A' *μέλος* $= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2$

$= \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 + \beta^2$

$= \alpha^2 \quad (1)$

B' *μέλος* $= \alpha(2\beta - \alpha) - 2\alpha(\beta - \alpha)$

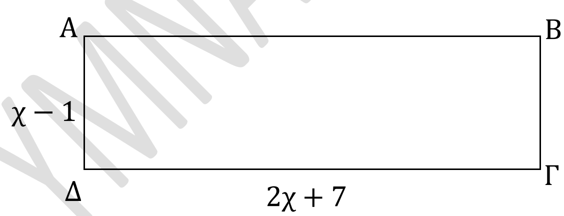
$= 2\alpha\beta - \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha^2$

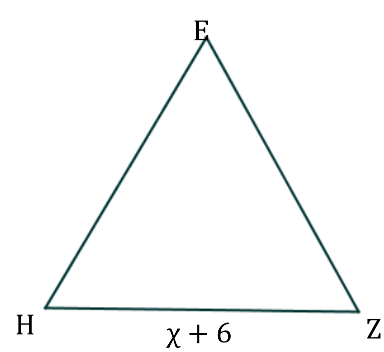
$= 2\alpha^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta$

$= \alpha^2 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) $\Rightarrow A'$ *μέλος* $= B'$ *μέλος*

8. Πιο κάτω δίνονται: $ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο και $ΕΖΗ$ ισόπλευρο τρίγωνο.





Να βρείτε:

α) την περίμετρο του $ΑΒΓΔ$ συναρτήσει του χ

$ΑΒ = ΔΓ = 2\chi + 7,\ ΑΔ = ΒΓ = \chi - 1$

$\Pi_{ΑΒΓΔ} = 2\alpha + 2\beta = 2(2\chi + 7) + 2(\chi - 1)$

$= 4\chi + 14 + 2\chi - 2$

$$= 4\chi + 2\chi + 14 - 2$$
$$= 6\chi + 12$$

β) το εμβαδόν του $ΑΒΓΔ$ συναρτήσει του χ

$$\mathrm{E}_{\mathrm{ΑΒΓΔ}} = \alpha\beta = (2\chi + 7)(\chi - 1)$$
$$= 2\chi^2 - 2\chi + 7\chi - 7$$
$$= 2\chi^2 + 5\chi - 7$$

γ) το εμβαδόν του ορθογωνίου για $\chi = 5\mathrm{m}$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{ΑΒΓΔ}} = 2\chi^2 + 5\chi - 7$$

Για $\chi = 5$, $\mathrm{E}_{\mathrm{ΑΒΓΔ}} = 2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 - 7$
$$= 2 \cdot 25 + 25 - 7$$
$$= 50 + 25 - 7$$
$$= 68\mathrm{m}^2$$

δ) την τιμή του χ αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι ίση με την περίμετρο του ισόπλευρου τριγώνου

$$\mathrm{ZH} = \mathrm{EZ} = \mathrm{EH} = \chi + 6$$

$$\Pi_{\mathrm{EZH}} = 3.(\mathrm{ZH})$$
$$= 3(\chi + 6)$$
$$= 3\chi + 18$$
$$\Pi_{\mathrm{ΑΒΓΔ}} = 6\chi + 12$$
$$\Pi_{\mathrm{EZH}} = 3\chi + 18$$

$\Pi_{\mathrm{ΑΒΓΔ}} = \Pi_{\mathrm{EZH}}$ άρα $6\chi + 12 = 3\chi + 18$
$$\Leftrightarrow 6\chi - 3\chi = 18 - 12$$
$$\Leftrightarrow 3\chi = 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} = \frac{6}{3}$$
$$\Leftrightarrow \chi = 2$$

Ενότητα 3: Γεωμετρία Μέρος Α΄ - ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

1. **Σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχίσετε τη σωστή ιδιότητα που αναγράφεται στη στήλη Β.**

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) Παραλληλόγραμμο	Α. Οι διαγώνιοι είναι άνισες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται
β) Ορθογώνιο	Β. Οι διαγώνιοι είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται
γ) Ρόμβος	Γ. Οι διαγώνιοι είναι άνισες και διχοτομούνται
δ) Τετράγωνο	Δ. Οι διαγώνιοι είναι άνισες, τέμνονται κάθετα και δεν διχοτομούνται
	Ε. Οι διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται

Α	Β
α	Γ
β	Ε
γ	Α
δ	Β

2. **Να γράψετε δίπλα από κάθε σχέση ανάλογα τη λέξη «ορθό» ή «λάθος»**.

α) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι ίσες. λάθος

β) Στο ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες παρά την κάθε βάση του είναι ίσες. ορθό

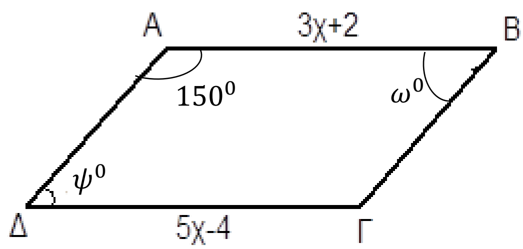
γ) Το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. ορθό

δ) Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου τέμνονται κάθετα. λάθος

ε) Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του. λάθος

3. **Στα πιο κάτω τετράπλευρα να υπολογίσετε τα χ, ψ και ω. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

α) **$ΑΒΓΔ$ παραλληλόγραμμο**



$AB = ΓΔ$ (οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες)

$5\chi - 4 = 3\chi + 2 \Leftrightarrow 5\chi - 3\chi = 2 + 4$

$\Leftrightarrow 2\chi = 6 \Leftrightarrow \frac{2\chi}{2} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\chi = 3}$

$\hat{A} + \hat{Δ} = 180°$ (εντός και επί τα αυτά)

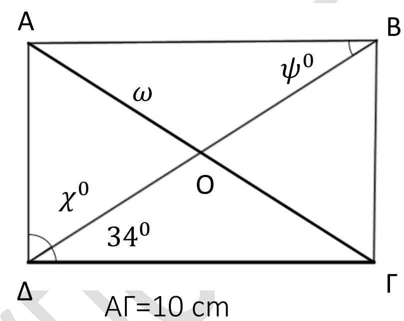
$150° + \hat{\psi} = 180° \Leftrightarrow \hat{\psi} = 180° - 150°$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\hat{\psi} = 30°}$

$\hat{B} = \hat{Δ}$ (οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες)

$\boldsymbol{\hat{\omega} = \hat{\psi} = 30°}$

β) **$ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο**



$AB̂Δ = BΔ̂Γ$ (εντός εναλλάξ)

$\boldsymbol{\hat{\psi} = 34°}$

$\hat{Δ} = 90°$ ($ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο)

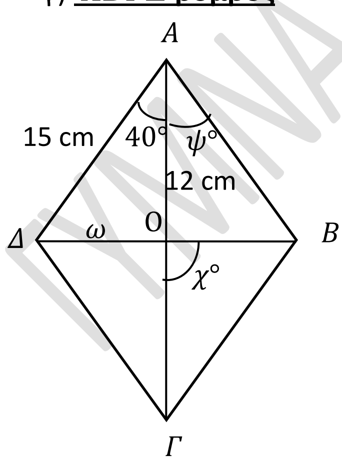
$\hat{\chi} + 34° = 90° \Leftrightarrow \hat{\chi} = 90° - 34°$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\hat{\chi} = 56°}$

$AO = OΓ$ (οι διαγώνιοι του διχοτομούνται)

$\boldsymbol{\omega = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{10}{2} = 5cm}$

γ) **$ΑΒΓΔ$ ρόμβος**



$\boldsymbol{\hat{\chi} = 90°}$ (οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα)

$\boldsymbol{\hat{\psi} = 40°}$ (οι διαγώνιοι του διχοτομούν τις γωνίες του)

(Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΟΔ) : $(AΔ)^2 = (AO)^2 + (OΔ)^2$

$\Leftrightarrow 15^2 = \omega^2 + 12^2$

$\Leftrightarrow 225 = \omega^2 + 144$

$\Leftrightarrow \omega^2 = 225 - 144$

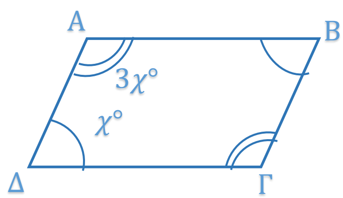
$\Leftrightarrow \omega^2 = 81$

$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{81}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\omega = 9cm}$

$AΔ = 15cm, AO = 12cm, ΔO = \omega$

4. **Σε ένα παραλληλόγραμμο μια γωνία του είναι τριπλάσια μιας άλλης. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.**



$\hat{A} = \hat{\Gamma} = 3\chi°$ (οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες)

$\hat{\Delta} = \hat{B} = \chi°$(οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες)

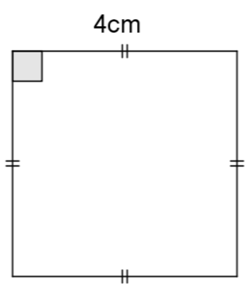
$\hat{A} + \hat{\Delta} = 180°$(εντός και επί τα αυτά)

$$3\chi + \chi = 180°$$
$$\Leftrightarrow 4\chi = 180°$$
$$\Leftrightarrow \frac{4\chi}{4} = \frac{180°}{4}$$
$$\Leftrightarrow \chi = 45°$$
$$3\chi = 3 \cdot 45° = 135°$$

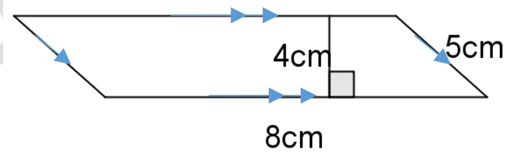
Άρα $\boldsymbol{\hat{A} = 135°, \hat{B} = 45°, \hat{\Gamma} = 135°}$ ***και*** $\boldsymbol{\hat{\Delta} = 45°}$

5. **Να βρείτε: i) Την περίμετρο ii) Το εμβαδόν των πιο κάτω σχημάτων.**

α)



β)



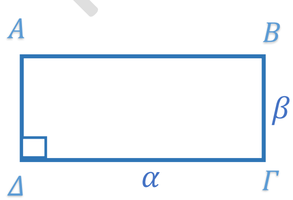
$i)\ \Pi_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 4\alpha = 4 \cdot 4 = 16cm$

$ii)\ E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \alpha^2 = 4^2 = 16cm^2$

$i)\Pi_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon} = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5$
$= 16 + 10 = 26cm$

$ii)\ E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon} = \beta \cdot \upsilon = 8 \cdot 4 = 32cm^2$

6. **Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ορθογωνίου με εμβαδόν 72 $\boldsymbol{m^2}$ αν το μήκος είναι διπλάσιο από το πλάτος του.**



$E_{o\rho\theta o\gamma\omega\nu\acute{\iota}o\upsilon} = \alpha \cdot \beta \quad \Rightarrow \quad 72 = 2\chi \cdot \chi \Leftrightarrow 72 = 2\chi^2$

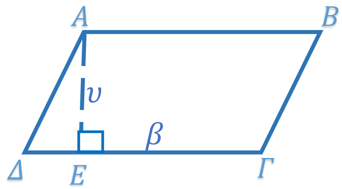
$$\Leftrightarrow \frac{72}{2} = \frac{2\chi^2}{2} \Leftrightarrow \chi^2 = 36$$
$$\Leftrightarrow \chi = \sqrt{36} \quad \Leftrightarrow \chi = 6m$$
$$2\chi = 2 \cdot 6 = 12m$$

$\Delta\Gamma$ μήκος: $\alpha = 2\chi$

$B\Gamma$ πλάτος: $\beta = \chi$

<u>Διαστάσεις:</u> $\boldsymbol{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma = 12\ m,\ \ \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma = 6\ m}$

7. **Παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 32 cm^2. Αν η μία βάση του είναι διπλάσια από το αντίστοιχο σε αυτή ύψος, να υπολογίσετε τη βάση και το ύψος του παραλληλογράμμου.**



$$\boldsymbol{E_{παραλληλογράμμου} = β \cdot υ} \Rightarrow 32 = 2χ \cdot χ$$

$$\Leftrightarrow 32 = 2χ^2$$

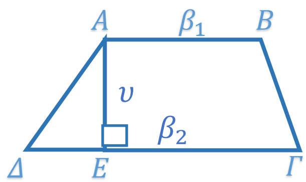
ύψος: $υ = χ$ $\quad \Leftrightarrow \frac{32}{2} = \frac{2χ^2}{2} \Leftrightarrow χ^2 = 16$

βάση: $β = 2χ$ $\quad \Leftrightarrow χ = \sqrt{16} \quad \Leftrightarrow χ = 4\ cm$

$$2χ = 2 \cdot 4 = 8\ cm$$

$$\boldsymbol{βάση = 8\ cm, \qquad ύψος = 4\ cm}$$

Οι βάσεις ενός τραπεζίου διαφέρουν κατά 5 m. Αν το ύψος του είναι 16 m και το εμβαδόν του 168 m^2 , να βρείτε τις βάσεις του τραπεζίου.



βάση: $β_1 = χ$ $\quad \boldsymbol{E_{τραπεζίου} = \frac{(β_1+β_2) \cdot υ}{2}}$

βάση: $β_2 = χ + 5$ $\quad \Rightarrow 168 = \frac{(χ+χ+5) \cdot 16}{2}$

ύψος: $υ = 16m$ $\quad \Leftrightarrow 168 = (2χ + 5) \cdot 8$

$$\Leftrightarrow 168 = 16χ + 40$$

$$\Leftrightarrow 168 - 40 = 16χ$$

$$\Leftrightarrow 128 = 16χ$$

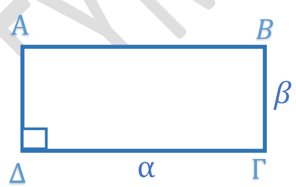
$$\Leftrightarrow \frac{128}{16} = \frac{16χ}{16}$$

$$\Leftrightarrow χ = 8m$$

$$χ + 5 = 8 + 5 = 13m$$

$$\boldsymbol{β_1 = 8\ m, \qquad β_2 = 13\ m}$$

8. **Ορθογώνιο έχει περίμετρο 32 cm . Αν το μήκος του είναι τριπλάσιο του πλάτους του, να βρείτε το εμβαδόν του.**



$$Π_{ορθογωνίου} = 2α + 2β \Rightarrow 32 = 2 \cdot 3χ + 2χ$$

$$\Leftrightarrow 32 = 6χ + 2χ$$

μήκος: $α = 3χ$ $\quad \Leftrightarrow 32 = 8χ$

πλάτος: $β = χ$ $\quad \Leftrightarrow \frac{32}{8} = \frac{8χ}{8}$

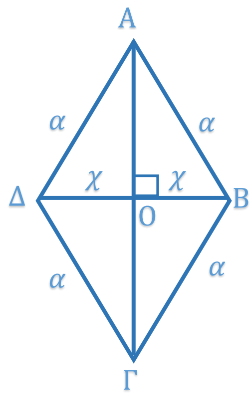
$$\Leftrightarrow χ = 4\ cm$$

$$3χ = 3 \cdot 4 = 12\ cm$$

$E_{ορθογωνίου} = α \cdot β = 12 \cdot 4 = 48\ cm^2$

$\boldsymbol{E_{ορθογωνίου} = 48\ cm^2}$

9. Ρόμβος έχει πλευρά $15\ cm$ και μεγάλη διαγώνιο $18\ cm$.
Να βρείτε: α) Την άλλη διαγώνιο β) Το εμβαδόν του γ) Την περίμετρό του.



α) $AB = \alpha = 15\ cm$

$ΑΓ = 18\ cm$

$ΟΑ = \frac{ΑΓ}{2}$ *(οι διαγώνιοι του διχοτομούνται)*

$\Leftrightarrow ΟΑ = \frac{18}{2} \Leftrightarrow ΟΑ = 9\ cm$

$ΑΓ \perp ΔΒ$ *(οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα)*

(Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΟΒ) $(ΑΒ)^2 = (ΟΑ)^2 + (ΟΒ)^2$

$\Leftrightarrow 15^2 = 9^2 + \chi^2$

$\Leftrightarrow 225 = 81 + \chi^2$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 225 - 81$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 144$

$\Leftrightarrow \chi = \sqrt{144}$

$\Leftrightarrow \chi = 12$ cm

Διαγώνιος $ΒΔ = 2 \cdot ΟΒ$

(οι διαγώνιοι του διχοτομούνται)

Άρα $ΒΔ = 2 \cdot 12 = 24$ cm

$\mathbf{ΒΔ = 24\ cm}$

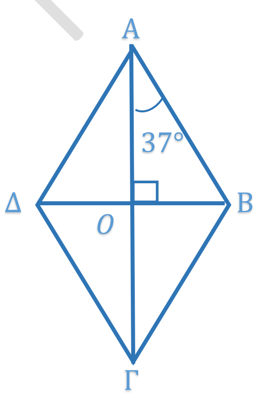
β) $E_{ρόμβου} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{24 \cdot 18}{2} = \frac{432}{2} = 216\ cm^2$

$\boldsymbol{E_{ρόμβου} = 216\ cm^2}$

γ) $\Pi_{ρόμβου} = 4\alpha = 4 \cdot 15 = 60\ cm$

$\boldsymbol{\Pi_{ρόμβου} = 60\ cm}$

10. Το εμβαδόν ρόμβου $ΑΒΓΔ$ είναι $24\ m^2$, η $ΑΓ = 8\ m$ και η γωνία $ΒΑΓ = 37°$.
Να υπολογίσετε: α) Την άλλη διαγώνιό του, β) Την περίμετρό του, γ) Τις γωνίες του.



α) Διαγώνιος ΑΓ: $\delta_1 = 8\ m$, Διαγώνιος ΒΔ: δ_2

$E_{ρόμβου} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} \Leftrightarrow 24 = \frac{8 \cdot \delta_2}{2} \Leftrightarrow 24 = 4\delta_2$

$\Leftrightarrow \frac{24}{4} = \frac{4\delta_2}{4} \Leftrightarrow \delta_2 = 6\ m$

Διαγώνιος $ΒΔ = 6\ m$

β) $\mathrm{AO} = \mathrm{O\Gamma} = 4\ \mathrm{m}, \Delta\mathrm{O} = \mathrm{OB} = 3\ m$ (οι διαγώνιοι του διχοτομούνται)

$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{B\Delta}$ (οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα)

(Π.Θ. στο τρίγωνο AOB) $(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AO})^2 + (\mathrm{OB})^2 \Leftrightarrow (\mathrm{AB})^2 = 4^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow (\mathrm{AB})^2 = 16 + 9$

$\Leftrightarrow (\mathrm{AB})^2 = 25$

$\Leftrightarrow \mathrm{AB} = \sqrt{25}$

$\Leftrightarrow \mathrm{AB} = 5\ m$

$\Pi_{\rho\acute{o}\mu\beta o\upsilon} = 4\alpha = 4 \cdot 5 = 20\ m$

$\boldsymbol{\Pi_{\rho\acute{o}\mu\beta o\upsilon} = 20\ m}$

γ) $\widehat{\mathrm{A}} = 2\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 2 \cdot 37° = 74°$(οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του)

$\widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{A}} = 74°$(οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες)

$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Delta} = 180°$(εντός και επί τα αυτά)

$\Leftrightarrow 74° + \widehat{\Delta} = 180°$

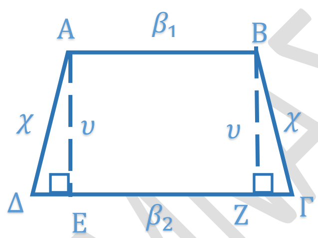
$\Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 180° - 74°$

$\Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 106°$

$\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta} = 106°$(οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες)

$\boldsymbol{\widehat{\mathrm{A}} = 74°, \widehat{\mathrm{B}} = 106°, \widehat{\Gamma} = 74°, \widehat{\Delta} = 106°}$

. Ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta(A\Delta = B\Gamma)$ έχει βάσεις $AB = 9\ m$ και $\Gamma\Delta = 21\ m$. Αν η περίμετρός του είναι ίση με $50\ m$, να βρείτε το εμβαδόν του.



$\beta_1 = 9\ m \qquad \beta_2 = 21\ m$

$\mathrm{A\Delta} = B\Gamma = \chi \qquad \mathrm{AE} = \mathrm{BZ} = \upsilon$

$\Pi_{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon} = \beta_1 + \beta_2 + \chi + \chi \Leftrightarrow 50 = 9 + 21 + \chi + \chi$

$\Leftrightarrow 50 = 30 + 2\chi \Leftrightarrow 50 - 30 = 2\chi \Leftrightarrow 20 = 2\chi$

$\Leftrightarrow \frac{20}{2} = \frac{2\chi}{2} \Leftrightarrow \chi = 10\ m$, άρα $\mathrm{B\Gamma} = 10m,\ \mathrm{A\Delta} = 10m$

$\Delta\Gamma = \Delta\mathrm{E} + \mathrm{EZ} + \mathrm{Z\Gamma}(\mathrm{EZ} = \mathrm{AB} = 9m$ και $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{Z\Gamma}$)

$\Delta\mathrm{E} = \mathrm{Z\Gamma} = (21 - 9) \div 2 = 12 \div 2 = 6$

(Π.Θ. στο τρίγωνο BZΓ) $(\mathrm{B\Gamma})^2 = (\mathrm{BZ})^2 + (\mathrm{Z\Gamma})^2 \Leftrightarrow 10^2 = \upsilon^2 + 6^2 \Leftrightarrow \upsilon^2 = 100 - 36$

$\Leftrightarrow \upsilon^2 = 64 \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{64} \Leftrightarrow \upsilon = 8\ m$

$E_{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\cdot\upsilon}{2} = \frac{(9+21)\cdot 8}{2} = \frac{30\cdot 8}{2} = \frac{240}{2} = 120\ m^2$

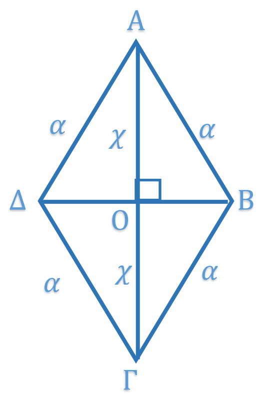
$\boldsymbol{E_{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon} = 120\ m^2}$

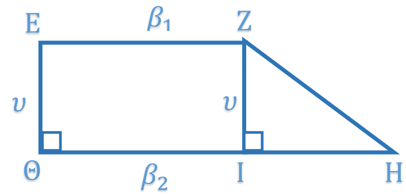
11. Ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $60\ m\ και\ 68\ m$ είναι ισοδύναμο με ρόμβο που η μια διαγώνιός του είναι ίση με $24\ m$ και η περίμετρός του είναι ίση με $80\ m$.

Να βρείτε:

α) Το ύψος του τραπεζίου

β) Την περίμετρο του τραπεζίου





$\mathrm{EZ} = \beta_1 = 60\ m$

$\Theta\mathrm{H} = \beta_2 = 68\ m$

$\mathrm{E}\Theta = \mathrm{ZI} = \upsilon$

α) $\mathrm{B}\Delta = \delta_1 = 24\ m, άρα\ \Delta\mathrm{O} = \mathrm{OB} = 12\ m (οι\ διαγώνιοί\ του\ διχοτομούνται)$

$\Pi_{ρόμβου} = 80\ m$

$\Pi_{ρόμβου} = 4\alpha \Leftrightarrow 80 = 4\alpha \Leftrightarrow \frac{80}{4} = \frac{4\alpha}{4} \Leftrightarrow \alpha = 20\ m$

$\mathrm{AB} = \alpha = 20\ m$

(Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΟΒ) $(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{AO})^2 + (\mathrm{OB})^2 \Leftrightarrow (20)^2 = \chi^2 + 12^2 \Leftrightarrow \chi^2 = 400 - 144$

$\Leftrightarrow \chi^2 = 256 \Leftrightarrow \chi = \sqrt{256} \Leftrightarrow \chi = 16\ m$

$\mathrm{AO} = \chi = 16\ m, άρα\ \mathrm{A}\Gamma = \delta_2 = 2 \cdot \mathrm{AO} = 2 \cdot 16 = 32\ m (οι\ διαγώνιοι\ του\ διχοτομούνται)$

$E_{ρόμβου} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{24 \cdot 32}{2} = \frac{768}{2} = 384\ m^2$

$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{E_{ρόμβου} = 384\ m^2} \\ \boldsymbol{E_{τραπεζίου} = E_{ρόμβου}} \end{array}\right\}$ Άρα $\boldsymbol{E_{τραπεζίου} = 384\ m^2}$

$E_{τραπεζίου} = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow 384 = \frac{(60+68) \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow 384 = \frac{128 \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow 384 = 64\upsilon$

$\Leftrightarrow \frac{384}{64} = \frac{64\upsilon}{64} \Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon = 6\ m}$

β) $\mathrm{ZI} = \upsilon = 6\ m, \mathrm{IH} = \Theta\mathrm{H} - \Theta\mathrm{I} = 68 - 60 = 8\ m$

$(Π.Θ.\ στο\ τρίγωνο\ \mathrm{ZIH})$ $(\mathrm{ZH})^2 = (\mathrm{ZI})^2 + (\mathrm{IH})^2 \Leftrightarrow (\mathrm{ZH})^2 = 6^2 + 8^2$

$\Leftrightarrow (\mathrm{ZH})^2 = 36 + 64$

$\Leftrightarrow (\mathrm{ZH})^2 = 100$

$\Leftrightarrow \mathrm{ZH} = \sqrt{100}$

$\Leftrightarrow ZH = 10\ m$

$\Pi_{τραπεζίου} = \mathrm{EZ} + \mathrm{ZH} + \mathrm{H}\Theta + \mathrm{E}\Theta = 60 + 10 + 68 + 6 = 144\ m$

$\boldsymbol{\Pi_{τραπεζίου} = 144\ m}$

12. Να βρείτε το μήκος και το εμβαδόν κύκλου του οποίου η ακτίνα είναι ίση με $6cm$.

$\Gamma = 2\pi R = 2\pi \cdot 6 = 12\pi cm$ (Γ: μήκος κύκλου)

$E = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi cm^2$ (Ε: εμβαδόν κύκλου)

$\boldsymbol{\Gamma = 12\pi cm}$, $\boldsymbol{E = 36\pi cm^2}$

13. Δίνεται κύκλος με διάμετρο $20cm$.

Να βρείτε:

α) το μήκος του

β) το εμβαδόν του

γ) το μήκος τόξου με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $45°$

δ) το εμβαδόν κυκλικού τομέα με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $120°$.

(να δώσετε τις απαντήσεις σας συναρτήσει του π)

α) $\Gamma =$

$\delta = 20cm$,

$\delta = 2R \Leftrightarrow 20 = 2R \Leftrightarrow \frac{20}{2} = \frac{2R}{2} \Leftrightarrow R = 10cm$

$\Gamma = 2\pi R = 2\pi \cdot 10 = 20\pi\ cm \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma = 20\pi\ cm}$

β) $E =$

$R = 10cm$

$E = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi\ cm^2 \Rightarrow \boldsymbol{E = 100\pi\ cm^2}$

γ) $\gamma =$ (γ: μήκος τόξου)

$R = 10cm$, $\mu° = 45°$

$\gamma = \frac{2\pi R\mu°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 45°}{360°} = \frac{900\pi}{360} = \frac{5\pi}{2} cm \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = \frac{5\pi}{2} cm}$

δ) $E_{\kappa.\tau.} =$ ($E_{\kappa.\tau.}$: εμβαδόν κύκλου τομέα)

$R = 10cm$, $\mu° = 120°$

$$E_{\kappa.\tau.} = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{100\pi}{3} cm^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{E_{\kappa.\tau.} = \frac{100\pi}{3} cm^2}$$

14. Το εμβαδόν κύκλου είναι ίσο με $25\pi\ m^2$. Να βρείτε την περίμετρό του.

$\mathrm{E} = 25\pi\ m^2 \quad , \quad \Gamma = ;$

$\mathrm{E} = \pi R^2 \Rightarrow 25\pi = \pi R^2 \Leftrightarrow 25 = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{25} \Leftrightarrow R = 5m$

$\Gamma = 2\pi \mathrm{R} = 2\pi \cdot 5 = 10\pi\ m \quad \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma = 10\pi\ m}$

15. Κύκλος έχει εμβαδόν $50,24 cm^2$. Να βρείτε το μήκος του.

$\mathrm{E} = 50{,}24\ cm^2 \quad , \quad \Gamma = ;$

$\mathrm{E} = \pi \mathrm{R}^2 \Rightarrow 50{,}24 = 3{,}14\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \dfrac{50{,}24}{3{,}14} = \dfrac{3{,}14\mathrm{R}^2}{3{,}14} \Leftrightarrow 16 = \mathrm{R}^2$
$\Leftrightarrow \mathrm{R} = \sqrt{16} \Leftrightarrow \mathrm{R} = 4cm$

$\Gamma = 2\pi \mathrm{R} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi\ cm \quad \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma = 8\pi\ cm}$

16. Ένας κύκλος έχει μήκος $36\pi\ m$. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου του κύκλου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60°.

$\Gamma = 36\pi\ m \quad , \quad \mu^\circ = 60^\circ \quad , \quad \gamma = ;$

$\Gamma = 2\pi \mathrm{R} \Rightarrow 36\pi = 2\pi \mathrm{R} \Leftrightarrow 36 = 2\mathrm{R} \Leftrightarrow \dfrac{36}{2} = \dfrac{2\mathrm{R}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{R} = 18m$

$\gamma = \dfrac{2\pi \mathrm{R}\mu^\circ}{360^\circ} = \dfrac{2\pi \cdot 18 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \dfrac{2160\pi}{360} = 6\pi\ m \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = 6\pi\ m}$

17. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα με αντίστοιχη επίκεντρη γωνία 72° ,ισούται με $45\pi\ cm^2$. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου στον οποίο ανήκει ο κυκλικός τομέας. (Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π).

$\mathrm{E}_{\kappa.\tau.} = 45\pi\ \mathrm{cm}^2 \quad , \quad \mu^\circ = 72^\circ \quad , \quad \Gamma = ;$

$\mathrm{E}_{\kappa.\tau.} = \dfrac{\pi \mathrm{R}^2 \mu^\circ}{360^\circ} \Rightarrow 45\pi = \dfrac{\pi \cdot \mathrm{R}^2 \cdot 72^\circ}{360^\circ} \Leftrightarrow 45 = \dfrac{\mathrm{R}^2}{5} \Leftrightarrow 45 \cdot 5 = \mathrm{R}^2 \Leftrightarrow 225 = \mathrm{R}^2$
$\Leftrightarrow \mathrm{R} = \sqrt{225} \Leftrightarrow \mathrm{R} = 15cm$

$\Gamma = 2\pi \mathrm{R} = 2\pi \cdot 15 = 30\pi\ cm \quad \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma = 30\pi\ cm}$

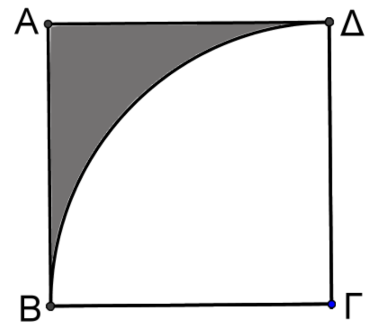
18. Στην εικόνα δίπλα φαίνεται το θέατρο στον αρχαιολογικό χώρο της Βεργίνας το οποίο διέθετε ημικυκλική ορχήστρα διαμέτρου $28m$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της.

$\delta = 28m \quad , \quad \mathrm{E}_{\eta\mu.} = ;$

$\delta = 2R \Rightarrow 28 = 2R \Leftrightarrow \frac{28}{2} = \frac{2R}{2} \Leftrightarrow R = 14m$

$E_{ημ.} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 14^2}{2} = \frac{196\pi}{2} = 98\pi\, m^2 \;\Rightarrow\; \mathbf{E_{ημ.} = 98\pi\, m^2}$

19. Το διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά $AB = 18cm$. Το τόξο ΒΔ κατασκευάστηκε με κέντρο το Γ και ακτίνα ΔΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους. (Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π).



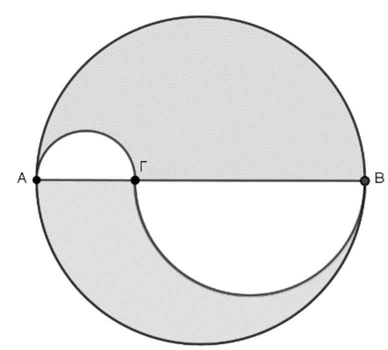
$AB = 18cm \quad , \quad E_{σκ.} = ;$

$E_{ΑΒΓΔ} = \alpha^2 = 18^2 = 324cm^2$

$E_{τεταρτ.} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 18^2}{4} = \frac{324\pi}{4} = 81\pi\, cm^2$

$E_{σκ.} = E_{ΑΒΓΔ} - E_{κ.τ.} = (324 - 81\pi)cm^2 \Rightarrow \mathbf{E_{σκ.} = (324 - 81\pi)cm^2}$

20. Στο πιο κάτω σχήμα $AB = 20cm$ και $ΑΓ = 6cm$. Να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



$E_{σκ.} = E_{κύκλου} - E_{ημ.ΒΓ} - E_{ημ.ΑΓ}$

$AB = 20cm\,, ΑΓ = 6cm\,, \mathbf{E_{σκ.}} = ;$

$ΑΓ = 6cm \Rightarrow R_1 = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$

$E_{ημ.ΑΓ} = \frac{\pi {R_1}^2}{2} = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}\, cm^2$

$ΒΓ = ΑΒ - ΑΓ = 20 - 6 = 14cm \Rightarrow R_2 = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{14}{2} = 7cm$

$E_{ημ.ΒΓ} = \frac{\pi {R_2}^2}{2} = \frac{\pi \cdot 7^2}{2} = \frac{49\pi}{2}\, cm^2$

$AB = 20cm \Rightarrow R_3 = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10cm$

$E_{κύκλου} = \pi {R_3}^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi\, cm^2$

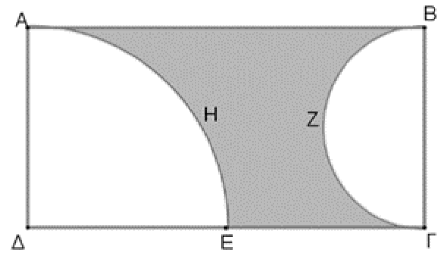
$E_{σκ.} = E_{κύκλου} - E_{ημ.ΒΓ} - E_{ημ.ΑΓ} = 100\pi - \frac{49\pi}{2} - \frac{9\pi}{2}$

$= 100\pi - \frac{58\pi}{2} = 100\pi - 29\pi = 71\pi\, cm^2$

$\mathbf{E_{σκ.} = 71\pi\, cm^2}$

21. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης περιοχής του πιο κάτω σχήματος. (Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π)

$\mathbf{ΑΒΓΔ\ ορθογώνιο}$
$\mathbf{ΓΔ = 16\mathit{cm}}$
$\mathbf{Ε\ μέσο\ ΓΔ}$
$\mathbf{\widehat{ΒΖΓ}\ ημικύκλιο}$
$\mathbf{\widehat{ΑΗΕ}\ τεταρτοκύκλιο}$



$\mathbf{α)\ Ε_{σκ.} = ;}$ $\qquad$ $\mathbf{Ε_{σκ.}} = Ε_{ΑΒΓΔ} - Ε_{ημ.ΒΖΓ} - Ε_{τεταρτ.ΑΗΕ}$

$ΑΒ = ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ$ (απέναντι πλευρές *ορθογωνίου* ίσες)

$ΔΕ = ΓΕ = \frac{ΓΔ}{2} = \frac{16}{2} = 8cm$ (Ε μέσοΓΔ)

$ΑΔ = ΔΕ = R_1 = 8cm$(ακτίνα τεταρτοκύκλιου)

$Ε_{τεταρτ.ΑΗΕ} = \frac{πR_1{}^2}{4} = \frac{π \cdot 8^2}{4} = \frac{64π}{4} = 16π\ cm^2$

$ΒΓ = 8cm \Rightarrow R_2 = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{8}{2} = 4cm$

$Ε_{ημ.ΒΖΓ} = \frac{πR_2{}^2}{2} = \frac{π \cdot 4^2}{2} = \frac{16π}{2} = 8π\ cm^2$

$ΓΔ = α = 16cm\ , ΑΔ = β = 8cm$

$Ε_{ΑΒΓΔ} = α \cdot β = 16 \cdot 8 = 128cm^2$
$\mathbf{Ε_{σκ.}} = Ε_{ΑΒΓΔ} - Ε_{ημ.ΒΖΓ} - Ε_{τεταρτ.ΑΗΕ} = 128 - 8π - 16π = (128 - 24π)cm^2$
$\mathbf{Ε_{σκ.} = (128 - 24π)\mathit{cm}^2}$

$\mathbf{β)\ Π_{σκ.} = ;}$

$\mathbf{Π_{σκ.}} = ΑΒ + γ_{τόξουΒΖΓ} + ΓΕ + γ_{τόξουΑΗΕ}$

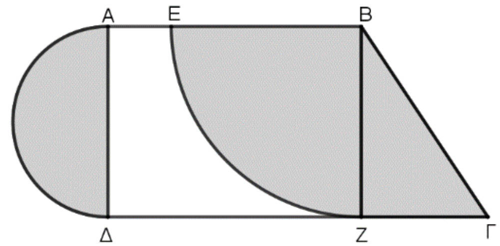
$γ_{τόξουΑΗΕ} = \frac{2πR_1}{4} = \frac{2π \cdot 8}{4} = \frac{16π}{4} = 4πcm$

$γ_{τόξουΒΖΓ} = \frac{2πR_2}{2} = \frac{2π \cdot 4}{2} = \frac{8π}{2} = 4πcm$

$\mathbf{Π_{σκ.}} = ΑΒ + γ_{τόξουΒΖΓ} + ΓΕ + γ_{τόξουΑΗΕ} = 16 + 4π + 8 + 4π = (24 + 8π)cm$

$\mathbf{Π_{σκ.} = (24 + 8π)\mathit{cm}}$

Το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο $\left(\widehat{A} = 90°\right)$ με $AB = 6cm$, $ΔΓ = 9cm$ και $ΒΓ = 5cm$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας. (Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π. Τα τόξα στο σχήμα είναι ημικύκλια ή τεταρτοκύκλια)



α) $\mathbf{E_{σκ.}} = ;$

$\mathbf{E_{σκ.}} = E_{τριγώνουΒΖΓ} + E_{ημ.ΑΔ} + E_{τεταρτ.ΒΕΖ}$

$AB = ΔΖ = 6cm$

$ΓΔ = ΔΖ + ΓΖ \Rightarrow 9 = 6 + ΓΖ \Leftrightarrow ΓΖ = 9 - 6 \Leftrightarrow ΓΖ = 3cm$

$$\text{Π.Θ. στο τρίγωνο ΒΖΓ: } (ΒΓ)^2 = (ΒΖ)^2 + (ΓΖ)^2$$
$$\Leftrightarrow 5^2 = (ΒΖ)^2 + 3^2$$
$$\Leftrightarrow 25 = (ΒΖ)^2 + 9$$
$$\Leftrightarrow (ΒΖ)^2 = 25 - 9$$
$$\Leftrightarrow (ΒΖ)^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow ΒΖ = \sqrt{16}$$
$$\Leftrightarrow ΒΖ = 4cm$$

$ΒΖ = ΒΕ = R_1 = 4cm$(ακτίνα τεταρτοκύκλιου)

$E_{τεταρτ.ΒΕΖ} = \frac{πR_1{}^2}{4} = \frac{π \cdot 4^2}{4} = \frac{16π}{4} = 4π\ cm^2$

$ΑΔ = ΒΖ = 4cm \Rightarrow R_2 = \frac{ΑΔ}{2} = \frac{4}{2} = 2cm$

$E_{ημ.ΑΔ} = \frac{πR_2{}^2}{2} = \frac{π \cdot 2^2}{2} = \frac{4π}{2} = 2π\ cm^2$

$ΓΖ = β = 3cm$, $ΒΖ = υ = 4cm$

$E_{τριγώνουΒΖΓ} = \frac{β \cdot υ}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6cm^2$

$\mathbf{E_{σκ.}} = E_{τριγώνουΒΖΓ} + E_{ημ.ΑΔ} + E_{τεταρτ.ΒΕΖ} = 6 + 2π + 4π = (6 + 6π)cm^2$

$\mathbf{E_{σκ.} = (6 + 6π)cm^2}$

β) $\mathbf{Π_{σκ.}} = ;$

$\mathbf{Π_{σκ.}} = ΑΔ + γ_{τόξουΑΔ} + ΒΕ + ΒΓ + ΓΖ + γ_{τόξου.ΕΖ}$

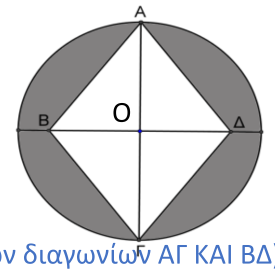
$γ_{τόξουΕΖ} = \frac{2πR_1}{4} = \frac{2π \cdot 4}{4} = \frac{8π}{4} = 2πcm$

$γ_{τόξουΑΔ} = \frac{2πR_2}{2} = \frac{2π \cdot 2}{2} = \frac{4π}{2} = 2πcm$

$$\mathbf{Π_{σκ.}} = ΑΔ + γ_{τόξουΑΔ} + ΒΕ + ΒΓ + ΓΖ + γ_{τόξου.ΕΖ} = 4 + 2π + 4 + 5 + 3 + 2π$$
$$= (16 + 4π)cm$$

$\mathbf{Π_{σκ.} = (16 + 4π)cm}$

23. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η ακτίνα του κύκλου 4cm και η πλευρά του ρόμβου 5cm.
Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.
(Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π).



$\mathbf{E_{σκ.}} = ;$

$\mathbf{E_{σκ.}} = \mathrm{E_{κύκλου}} - \mathrm{E_{ρόμβου}}$

$\text{Π. Θ. στο τρίγωνο ΑΟΒ: } (\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{BO})^2 + (\mathrm{AO})^2$ (Ο: σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ ΚΑΙ ΒΔ)

$\Leftrightarrow 5^2 = (\mathrm{BO})^2 + 4^2$

$\Leftrightarrow 25 = (\mathrm{BO})^2 + 16$

$\Leftrightarrow (\mathrm{BO})^2 = 25 - 16$

$\Leftrightarrow (\mathrm{BO})^2 = 9$

$\Leftrightarrow \mathrm{BO} = \sqrt{9}$

$\Leftrightarrow \mathrm{BO} = 3cm$

$\mathrm{AO} = \mathrm{R} = 4cm(\text{ακτίνα κύκλου})$

$\mathrm{E_{κύκλου}} = \pi \mathrm{R}^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi\ cm^2$

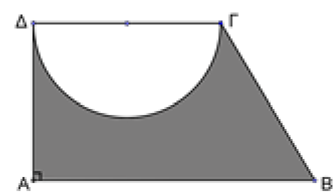
$\delta_1 = \mathrm{AΓ} = 2\mathrm{AO} = 2 \cdot 4 = 8cm\ και\ \delta_2 = \mathrm{BΔ} = 2\mathrm{BO} = 2 \cdot 3 = 6cm$

$\mathrm{E_{ρόμβου}} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24cm^2$

$\mathbf{E_{σκ.}} = \mathrm{E_{κύκλου}} - \mathrm{E_{ρόμβου}} = (16\pi - 24)cm^2$

$\mathbf{E_{σκ.} = (16\pi - 24)cm^2}$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.
Δίνονται $\mathbf{AB \parallel ΓΔ}$, $\mathbf{ΔA \perp AB}$, $\mathbf{AB = 18}cm$, $\mathbf{BΓ = 10}cm$ και $\mathbf{ΓΔ = 12}cm$.
(Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π)



$\mathbf{E_{σκ.}} = ;$

$\mathbf{E_{σκ.}} = \mathrm{E_{τραπεζίου}} - \mathrm{E_{ημικυκλίου}}$

Φέρω την ΓΕ κάθετη στην ΑΒ

$\mathrm{AE} = \mathrm{ΓΔ} = 12cm$

$\mathrm{AB} = \mathrm{AE} + \mathrm{BE} \Rightarrow 18 = 12 + \mathrm{BE} \Rightarrow \mathrm{BE} = 18 - 12 = 6cm,\ \mathrm{AΔ} = υ$

$\text{Π. Θ. στο τρίγωνο ΒΕΓ : } (\mathrm{BΓ})^2 = (\mathrm{ΓE})^2 + (\mathrm{BE})^2$

$\Leftrightarrow 10^2 = (\mathrm{ΓE})^2 + 6^2$

$\Leftrightarrow 100 = (\mathrm{ΓE})^2 + 36$

$\Leftrightarrow (\mathrm{ΓE})^2 = 100 - 36$

$\Leftrightarrow (\mathrm{ΓE})^2 = 64$

$\Leftrightarrow \mathrm{ΓE} = \sqrt{64}$

$$\Leftrightarrow \Gamma\mathrm{E} = 8cm$$

$\Delta\mathrm{O} = \mathrm{R} = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$($R$ ακτίνα ημικυκλίου και Ο *κέντρο του άρα* μέσο της ΓΔ)

$$\mathrm{E}_{\eta\mu\iota\kappa\upsilon\kappa\lambda\acute{\iota}o\upsilon} = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{2} = \frac{\pi\cdot 6^2}{2} = \frac{36\pi}{2} = 18\pi\ cm^2$$

$$\beta_1 = \Gamma\Delta = 12cm \quad \beta_2 = AB = 18cm \quad \kappa\alpha\iota \quad \upsilon = \Gamma E = 8cm$$

$$\mathrm{E}_{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon} = \frac{(\beta_1+\beta_2)\cdot\upsilon}{2} = \frac{(12+18)\cdot 8}{2} = \frac{30\cdot 8}{2} = \frac{240}{2} = 120cm^2$$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\sigma\kappa}.} = \mathrm{E}_{\tau\rho\alpha\pi\varepsilon\zeta\acute{\iota}o\upsilon} - \mathrm{E}_{\eta\mu\iota\kappa\upsilon\kappa\lambda\acute{\iota}o\upsilon} = (120 - 18\pi)cm^2$$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\sigma\kappa}.} = (\mathbf{120 - 18\pi})\boldsymbol{cm^2}$$

Ενότητα 4:Εξισώσεις- Ανισώσεις α’ βαθμού

1. Να βρείτε τις τιμές των $\boldsymbol{\alpha}$ **και** $\boldsymbol{\beta}$, ώστε οι πιο κάτω εξισώσεις να είναι αδύνατες:

   $(\alpha)\ (\boldsymbol{\beta}-\mathbf{7})\chi=\mathbf{3}$

   $(\beta-7)\chi=3 \quad \text{για να είναι αδύνατη πρέπει να έχουμε } 0\chi=3$
   $\Rightarrow \beta-7=0 \Leftrightarrow \beta=7$

   $(\boldsymbol{\beta})\ \alpha\chi-8=6-\chi$

   $\Leftrightarrow \alpha\chi+\chi=6+8$
   $\Leftrightarrow (\alpha+1)\chi=14 \ \text{ για να είναι αδύνατη πρέπει να έχουμε } 0\chi=14$
   $\Rightarrow \alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$

2. Να βρείτε τις τιμές των **α,** $\boldsymbol{\kappa}$ **και** $\boldsymbol{\mu}$, ώστε οι πιο κάτω εξισώσεις να είναι αόριστες:

   $(\alpha)\ \alpha\chi-6=2(\chi-3)$

   $\Leftrightarrow \alpha\chi-6=2\chi-6$

   $\Leftrightarrow \alpha\chi-2\chi=-6+6$
   $\Leftrightarrow (\alpha-2)\chi=0 \ \text{ για να είναι αόριστη πρέπει να έχουμε } 0\chi=0$
   $\Rightarrow \alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=2$

   $(\boldsymbol{\beta})\quad \kappa\chi-3\mu=\chi+6$

   $\Leftrightarrow \kappa\chi-\chi=3\mu+6$
   $\Leftrightarrow (\kappa-1)\chi=3\mu+6 \ \text{ για να είναι αόριστη πρέπει να έχουμε } 0\chi=0$
   $\Rightarrow \kappa-1=0 \Leftrightarrow \kappa=1 \quad \text{και} \quad 3\mu+6=0 \Leftrightarrow 3\mu=-6 \Leftrightarrow \frac{3\mu}{3}=\frac{-6}{3} \Leftrightarrow \mu=-2$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν μία λύση, καμία λύση ή άπειρες λύσεις:

   (α) $5\chi+10=5(\chi+2)$

   $\Leftrightarrow 5\chi+10=5\chi+10$

   $\Leftrightarrow 5\chi-5\chi=10-10$

   $\Leftrightarrow 0\chi=0$ άπειρες λύσεις

   (β) $6\chi-3=3(2\chi-2)$

   $\Leftrightarrow 6\chi-3=6\chi-6$

   $\Leftrightarrow 6\chi-6\chi=-6+3$

   $\Leftrightarrow 0\chi=-3$ καμία λύση

   (γ) $\frac{\chi+3}{3}+\frac{\chi}{2}=1$

   $\Leftrightarrow \frac{2(\chi+3)}{6}+\frac{3\chi}{6}=\frac{6}{6}$

   $\Leftrightarrow 2(\chi+3)+3\chi=6$
   $\Leftrightarrow 2\chi+6+3\chi=6$

   $\Leftrightarrow 2\chi+3\chi=6-6$
   $\Leftrightarrow 5\chi=0$

   $\Leftrightarrow \frac{5\chi}{5}=\frac{0}{5}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\chi = 0}$ μία λύση

4. Να επιλύσετε τους πιο κάτω τύπους ως προς τη μεταβλητή που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση.

α) $\boldsymbol{\Gamma = 2\pi R \quad (R)}$

$\Leftrightarrow \frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{2\pi R}{2\pi}$

$\Leftrightarrow R = \frac{\Gamma}{2\pi}$

β) $\boldsymbol{\Pi = 2(\alpha + \beta) \quad (\alpha)}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi = 2\alpha + 2\beta \Leftrightarrow \Pi - 2\beta = 2\alpha}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{\Pi - 2\beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\Pi - 2\beta}{2}}$

γ) $\boldsymbol{u = u_0 + at \quad (t)}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{u - u_0 = at}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{u - u_0}{a} = \frac{at}{a}}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \frac{u - u_0}{a}}$

δ) $\boldsymbol{E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} \quad (\beta)}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{2E = \beta \cdot \upsilon}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{2E}{\upsilon} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{\upsilon}}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = \frac{2E}{\upsilon}}$

5. Να γράψετε δίπλα από κάθε πρόταση «ορθό» ή «λάθος».

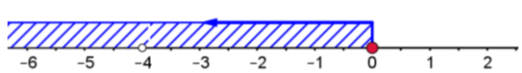
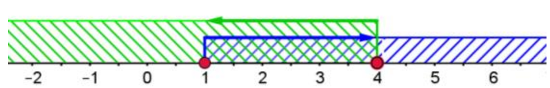
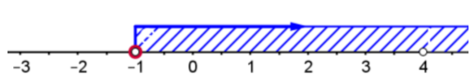
α) Αν $\chi > 5$ τότε $\frac{\chi}{-3} > \frac{5}{-3}$ …λάθος…

β) Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - 14 > \beta - 14$ …ορθό…

γ) Αν $\alpha > 3$ τότε $-\alpha < -3$ … ορθό…

δ) Αν $\alpha \geq \beta$ τότε $-\alpha \geq -\beta$ …λάθος…

6. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

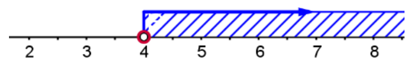
άστημα	Γραφική αναπαράσταση	Ανίσωση
$\chi \in (-\infty, \mathbf{0}]$		$\chi \leq 0$
$\chi \in [\mathbf{1}, \mathbf{4}]$		$\mathbf{1} \leq \chi \leq 4$
$\chi \in (-\mathbf{1}, +\infty)$		$\chi > -1$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις και να παραστήσετε γραφικά τη λύση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

α) $7\chi - 4 > 4\chi + 8$

$\Leftrightarrow 7\chi - 4\chi > 8 + 4$

$\Leftrightarrow 3\chi > 12$

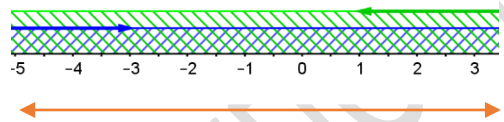


$\Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} > \frac{12}{3}$

$\Leftrightarrow \chi > 4$

β) $2\chi - 4 + \chi < 3\chi + 10$

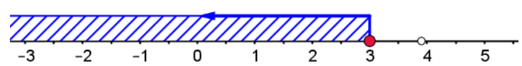
$\Leftrightarrow 2\chi + \chi - 3\chi < 10 + 4$



$\Leftrightarrow 3\chi - 3\chi < 14$

$\Leftrightarrow 0\chi < 14 \Rightarrow$ άπειρες λύσεις

γ) $4 - 6(\chi - 2) \geq 12 - 2(\chi + 4)$



$\Leftrightarrow 4 - 6\chi + 12 \geq 12 - 2\chi - 8$

$\Leftrightarrow -6\chi + 2\chi \geq 12 - 8 - 4 - 12$

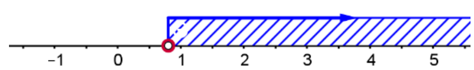
$\Leftrightarrow -4\chi \geq -12$

$\Leftrightarrow \frac{-4\chi}{-4} \leq \frac{-12}{-4}$

$\Leftrightarrow \chi \leq 3$

δ) $-2\chi + 8 < \chi + 3(\chi + 1)$

$\Leftrightarrow -2\chi + 8 < \chi + 3\chi + 3$



$\Leftrightarrow -2\chi - \chi - 3\chi < +3 - 8$

$\Leftrightarrow -6\chi < -5$

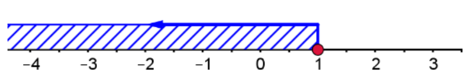
$\Leftrightarrow \frac{-6\chi}{-6} > \frac{-5}{-6}$

$\Leftrightarrow \chi > \frac{5}{6}$

ε) $3 - 5(\chi - 1) \geq 7\chi - 4$

$\Leftrightarrow 3 - 5\chi + 5 \geq 7\chi - 4$

$\Leftrightarrow -5\chi - 7\chi \geq -4 - 5 - 3$



$\Leftrightarrow -12\chi \geq -12$

$\Leftrightarrow \frac{-12\chi}{-12} \leq \frac{-12}{-12}$

$\Leftrightarrow \chi \leq 1$

στ) $\frac{\chi+3}{4} - \frac{\chi}{5} \geq 1$

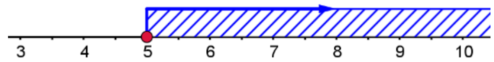
$\Leftrightarrow \frac{5(\chi+3)}{20} - \frac{4\chi}{20} \geq \frac{20}{20}$

$\Leftrightarrow 5(\chi+3) - 4\chi \geq 20$

$\Leftrightarrow 5\chi + 15 - 4\chi \geq 20$

$\Leftrightarrow 5\chi - 4\chi \geq 20 - 15$

$\Leftrightarrow \chi \geq 5$



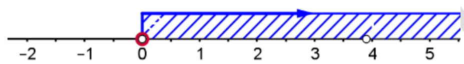
ζ) $\frac{\chi+2}{3} - \frac{\chi+1}{2} < \chi + \frac{3\chi+1}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{2(\chi+2)}{6} - \frac{3(\chi+1)}{6} < \frac{6\chi}{6} + \frac{3\chi+1}{6}$

$\Leftrightarrow 2(\chi+2) - 3(\chi+1) < 6\chi + 3\chi + 1$

$\Leftrightarrow 2\chi + 4 - 3\chi - 3 < 6\chi + 3\chi + 1$

$\Leftrightarrow 2\chi - 3\chi - 6\chi - 3\chi < +1 - 4 + 3$



$\Leftrightarrow -10\chi < 0$

$\Leftrightarrow \frac{-10\chi}{-10} > \frac{0}{-10}$

$\Leftrightarrow \chi > 0$

η) $\frac{2\chi-1}{3} - \frac{5\chi-4}{6} \leq \frac{6\chi-2}{4}$

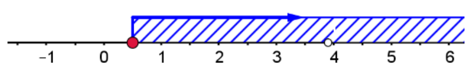
$\Leftrightarrow \frac{4(2\chi-1)}{12} - \frac{2(5\chi-4)}{12} \leq \frac{3(6\chi-2)}{12}$

$\Leftrightarrow 4(2\chi-1) - 2(5\chi-4) \leq 3(6\chi-2)$

$\Leftrightarrow 8\chi - 4 - 10\chi + 8 \leq 18\chi - 6$

$\Leftrightarrow 8\chi - 10\chi - 18\chi \leq -6 - 8 + 4$

$\Leftrightarrow -20\chi \leq -10$

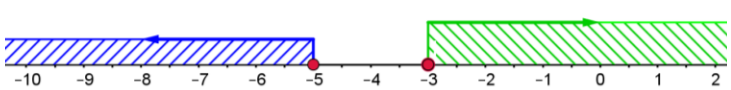


$\Leftrightarrow \frac{-20\chi}{-20} \geq \frac{-10}{-20}$

$\Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{2}$

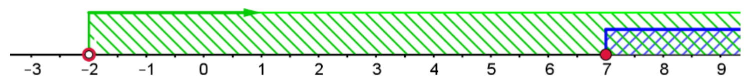
8. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των πιο κάτω ανισώσεων και οι λύσεις να δοθούν και σε μορφή διαστήματος.

α) $\chi \leq -5$ και $\chi \geq -3$



Λύσεις: Δεν συναληθεύουν

β) $\chi \geq 7$ και $\chi > -2$



Λύσεις: $\boldsymbol{\chi \geq 7}$ **ή** $\boldsymbol{\chi \in [\,7, +\infty)}$

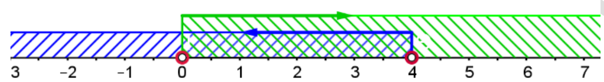
γ) $5\chi - 12 < \chi + 4$ και $\chi > 0$

$\Leftrightarrow 5\chi - \chi < 4 + 12$

$\Leftrightarrow 4\chi < 16$

$\Leftrightarrow \frac{4\chi}{4} < \frac{16}{4}$

$\Leftrightarrow \chi < 4$



Λύσεις: $\boldsymbol{0 < \chi < 4}$ **ή** $\boldsymbol{\chi \in (0, 4)}$

δ) $3(\chi + 2) > \chi + 12$ και $2(\chi - 5) < 2 - (5 - \chi)$

$\Leftrightarrow 3\chi + 6 > \chi + 12$

$\Leftrightarrow 3\chi - \chi > 12 - 6$

$\Leftrightarrow 2\chi > 6$

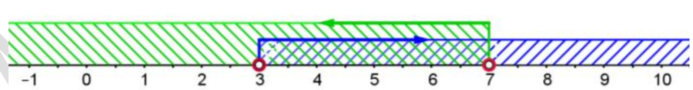
$\Leftrightarrow \frac{2\chi}{2} > \frac{6}{2}$

$\Leftrightarrow \chi > 3$

$\Leftrightarrow 2\chi - 10 < 2 - 5 + \chi$

$\Leftrightarrow 2\chi - \chi < 2 - 5 + 10$

$\Leftrightarrow \chi < 7$



Λύσεις: $\boldsymbol{3 < \chi < 7}$ **ή** $\boldsymbol{\chi \in (3, 7)}$

ε) $5(\chi + 1) + 4(3 - \chi) \leq 2\chi + 16$ και $\frac{3\chi}{4} + \frac{5}{6} > \frac{2\chi}{3} + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 5\chi + 5 + 12 - 4\chi \leq 2\chi + 16$

$\Leftrightarrow 5\chi - 4\chi - 2\chi \leq +16 - 5 - 12$

$\Leftrightarrow -1\chi \leq -1$

$\Leftrightarrow \frac{-1\chi}{-1} \geq \frac{-1}{-1}$

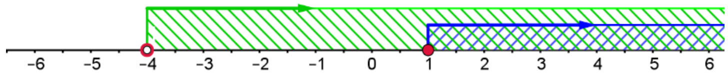
$\Leftrightarrow \chi \geq 1$

$\Leftrightarrow \frac{9\chi}{12} + \frac{10}{12} > \frac{8\chi}{12} + \frac{6}{12}$

$\Leftrightarrow 9\chi + 10 > 8\chi + 6$

$\Leftrightarrow 9\chi - 8\chi > 6 - 10$

$\Leftrightarrow \chi > -4$



Λύσεις: $\chi \geq 1$ **ή** $\chi \in [1, +\infty)$

9. Ο Ιάκωβος είναι συνδρομητής σταθερής τηλεφωνίας. Η εταιρεία προσφέρει στους πελάτες της την επιλογή μεταξύ των δυο πιο κάτω σχεδίων:

	ΠΑΓΙΑ ΧΡΕΩΣΗ (€)	ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΧΡΕΩΣΗ ΑΝΑ ΛΕΠΤΟ (€)
ΣΧΕΔΙΟ 1	5,35	0,10
ΣΧΕΔΙΟ 2	10,00	0,05

Αν ο Ιάκωβος θέλει να επιλέξει το <<σχέδιο 2>> , πόσος τουλάχιστον πρέπει να είναι ο συνολικός χρόνος ομιλίας του κατά τη διάρκεια του μήνα;

$$10 + 0{,}05\chi \leq 5{,}39 + 0{,}10\,\chi$$

$$0{,}05\chi - 0{,}10\ \chi \leq -10 + 5{,}35$$

$$-0{,}05\,\chi \leq -4{,}65$$

$$\chi \geq \frac{4{,}65}{0{,}05}$$

$$\chi \geq 93$$

Απάντηση: Ο χρόνος ομιλίας του πρέπει να είναι τουλάχιστον 93 λεπτά.

10. Μια έκταση $6000 m^2$ θα γίνει χώρος στάθμευσης αυτοκινήτων. Υπολογίζεται ότι κάθε αυτοκίνητο χρειάζεται $25\ m^2$ για να σταθμεύσει και για τις διάφορες εγκαταστάσεις χρειάζονται συνολικά $850\ m^2$. Πόσα το πολύ αυτοκίνητα θα χωράει ο χώρος αυτός;

$$25\chi + 850 \leq 6000$$

$$25\chi \leq 6000 - 850$$

$$\chi \leq 206$$

Απάντηση: Ο χώρος θα χωράει 206 αυτοκίνητα το πολύ.

Ενότητα 5: Συναρτήσεις

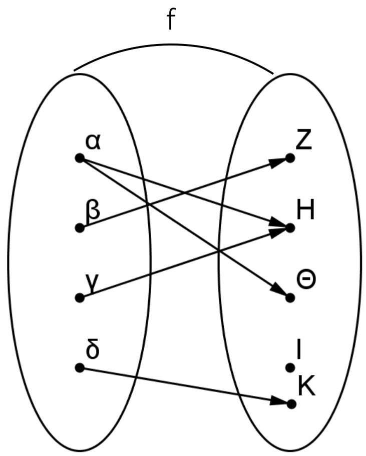
1. **Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις.**

   Λύση:

   α) $A = \{(3,2), (0,2), (5,7), (-1,-3)\}$

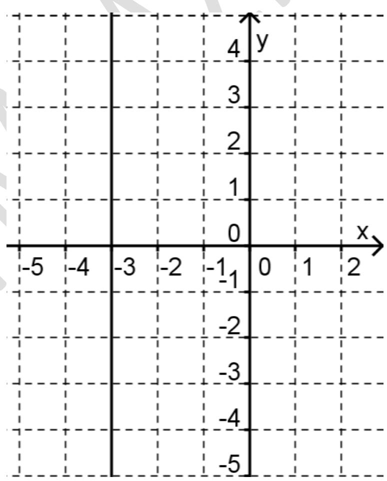
   Η αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση, γιατί κάθε τιμή του $\boldsymbol{x}$ αντιστοιχίζεται με μόνο μία τιμή του y

β)



Η αντιστοιχία δεν ορίζει συνάρτηση, διότι η τιμή $x = \alpha$ αντιστοιχίζεται με δύο τιμές του y, δηλαδή στο Η και Θ

γ)



Η αντιστοιχία δεν ορίζει συνάρτηση, διότι η τιμή $x = -3$ αντιστοιχίζεται με άπειρες τιμές του y

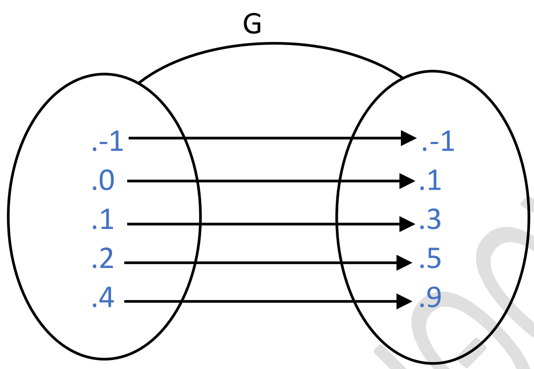
2. **(α) Να παραστήσετε το γράφημα** $\boldsymbol{G = \{(-1,-1), (0,1), (1,3), (2,5), (4,9)\}}$

Λύση:

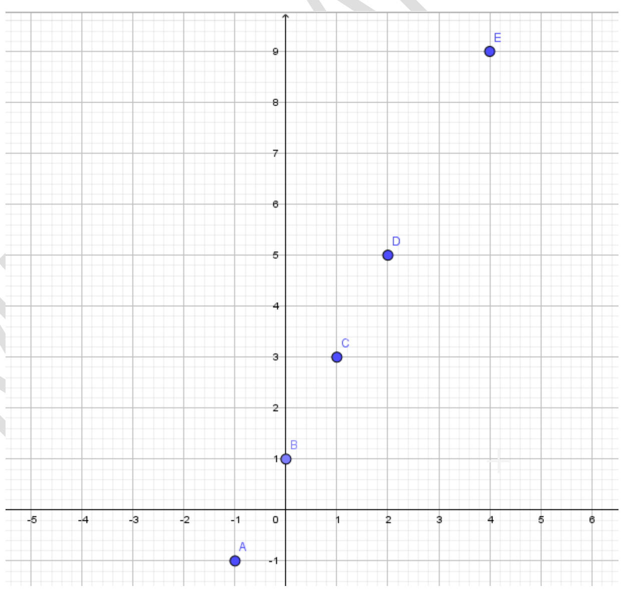
i. με τη χρήση πίνακα τιμών

χ	-1	0	1	2	4
y	-1	1	3	5	9

ii. με τη χρήση βελοειδούς διαγράμματος



iii. με τη χρήση γραφικής παράστασης



(β) Ορίζει συνάρτηση η αντιστοιχία που δίνεται με τους πιο πάνω τρόπους; Δικαιολογήστε.

Η αντιστοιχία ορίζει συνάρτηση, γιατί κάθε τιμή του $\boldsymbol{x}$ αντιστοιχίζεται με μόνο μία τιμή του y.

Αν είναι συνάρτηση να βρείτε τον τύπο της

Η ευθεία περνά από τα σημεία $(0,1)$ $\boldsymbol{και}$ $(1,3)$

Τύπος της συνάρτησης είναι: $\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y=\alpha x+\beta}\\&(0,1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{1=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=1}$

$(\boldsymbol{1,3})$ $\boldsymbol{y=\alpha x+\beta}$

$\boldsymbol{\Rightarrow 3=\alpha\cdot 1+1 \Leftrightarrow 3-1=\alpha \Leftrightarrow \alpha=2}$

$\boldsymbol{Άρα\ \ y=2x+1}$

3. Να γράψετε δίπλα από κάθε πρόταση «ορθό» ή «λάθος».

Λύση:

α) Η ευθεία που είναι **παράλληλη** με τον **άξονα** $\boldsymbol{x'x}$ έχει κλίση $\lambda=0$ «ορθό»

β) Η κλίση της ευθείας που είναι **κάθετη** στον **άξονα** $\boldsymbol{y'y}$ δεν ορίζεται «λάθος»

γ) Αν η ευθεία με εξίσωση: $y = \alpha x + \beta$ περνά από την αρχή των αξόνων τότε $\beta=0$ «ορθό»

δ) Η ευθεία $5y=3x$ περνά από την αρχή των αξόνων «ορθό»

4. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που :

α) Έχει κλίση $\boldsymbol{\lambda=2}$ και περνά από το σημείο$(\boldsymbol{0,-5})$

Λύση:

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y=\alpha x+\beta}$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}&=\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{\lambda}&=\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha=2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y=\alpha x+\beta}\\&(\boldsymbol{0,-5})\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-5=2\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-5}$$

$$\boldsymbol{Άρα\ \ y=2x-5}$$

β) Περνά από τα σημεία $(\boldsymbol{2,-1})$ και $(\boldsymbol{0,7})$

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y=\alpha x+\beta}\\&(\boldsymbol{0,7})\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{7=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=7}$

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{y=\alpha x+\beta}\\&(\boldsymbol{2,-1})\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{-1=\alpha\cdot 2+7 \Leftrightarrow -1-7=2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha=-8 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{2}=\frac{-8}{2} \Leftrightarrow \alpha=-4}$$

$$\boldsymbol{Άρα\ \ y=-4x+7}$$

γ) **Έχει κλίση $\boldsymbol{\lambda=0}$ και περνά από το σημείο $(\boldsymbol{-6,-4})$**

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\lambda=0\Rightarrow y=\beta}\\&(\boldsymbol{-6,-4})\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{y=-4}$$

δ) **Έχει κλίση $\boldsymbol{\lambda=-8}$ και περνά από την αρχή των αξόνων$(\boldsymbol{0,0})$**

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y=\alpha x}$ $\Big\}$ $\boldsymbol{\lambda=\alpha\Rightarrow\alpha=-8\Rightarrow\lambda=-8\ Άρα\ \ y=-8x}$

ε) **Που περνά από το σημείο $(-2\,,-6)$ και την αρχή των αξόνων$(0,0)$**

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\left.\begin{array}{r} y=\alpha x \\ (-2\,,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow -6=\alpha\cdot(-2) \Leftrightarrow -6=-2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha=6$

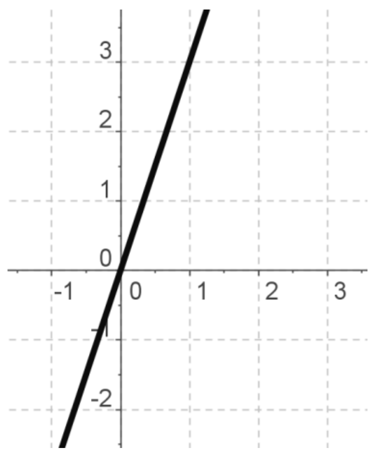
$$\Leftrightarrow \frac{2\alpha}{2}=\frac{6}{2} \Leftrightarrow \alpha=3$$

$Άρα\;\; y=3x$

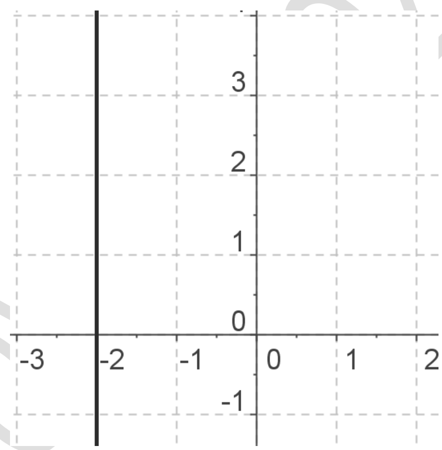
5. Από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

Λύση:

(α)



(β)

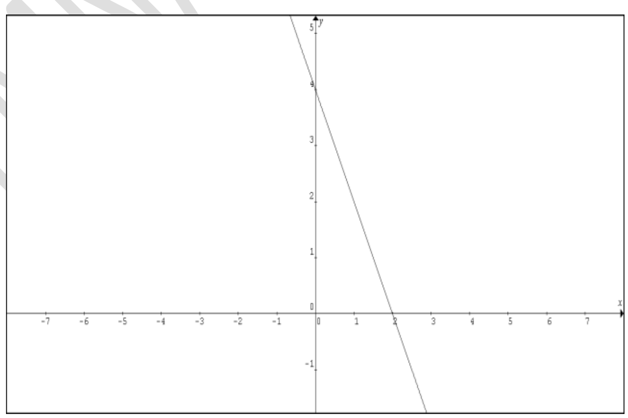


(α) Η ευθεία **περνά από την αρχή των αξόνων**$(0,0)$
Η εξίσωση της ευθείας είναι: $y=\alpha x$ **και** περνά από **το σημείο** $(1\,,3)$
Η εξίσωση της ευθείας είναι: $x=\kappa$
$3=\alpha\cdot 1 \Leftrightarrow \alpha=3$
$Άρα\;\; y=3x$

(β) **Η** ευθεία είναι **κάθετη στον άξονα των** $x'x\; στο\; σημείο\; (-2\,,0)$

$Άρα\;\; x=-2$

(γ)



(γ) Η ευθείας **περνά από τα σημεία** $(2,0)$ **και** $(0,4)$

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{y = \alpha x + \beta} \\ \boldsymbol{(0,4)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{4 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4}$

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{y = \alpha x + \beta} \\ \boldsymbol{(2,0)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{0 = \alpha \cdot 2 + 4 \Leftrightarrow -4 = 2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = -4 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{2} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \alpha = -2}$$

Άρα $\boldsymbol{y = -2x + 4}$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $\mathbf{A}\ (\mathbf{0}, \mathbf{6})$ και $\mathbf{B}\ (\mathbf{-1}, \mathbf{4})$

Λύση:

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\left.\begin{matrix} \boldsymbol{y = \alpha x + \beta} \\ \boldsymbol{(0,6)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{6 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6}$

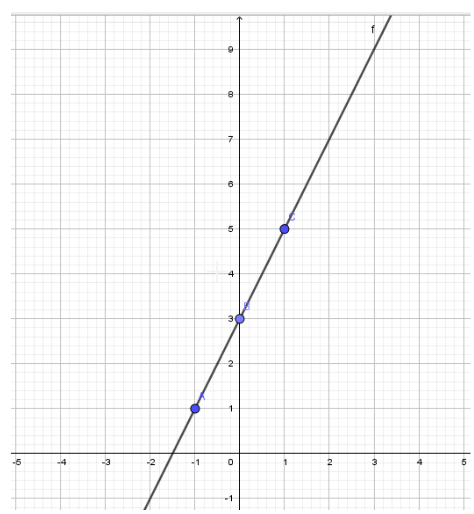
$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{y = \alpha x + \beta} \\ \boldsymbol{(-1,4)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{4 = \alpha \cdot (-1) + 6 \Leftrightarrow 4 = -1\alpha + 6}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \alpha = 6 - 4 \Leftrightarrow \alpha = 2}$$

Άρα $\boldsymbol{y = 2x + 6}$

7. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας: $y = 2x + 3$

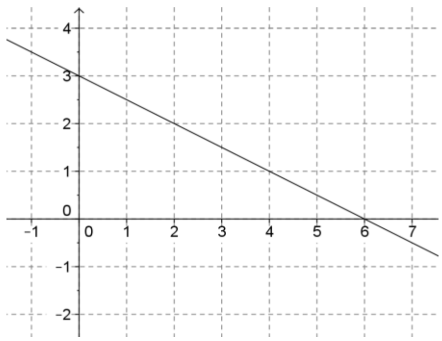
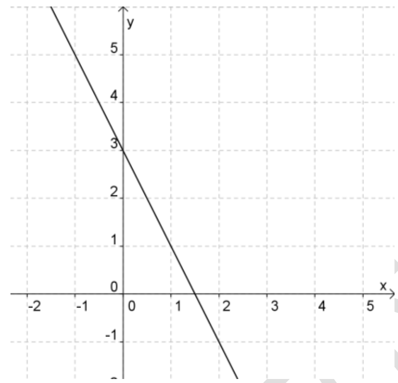
Λύση:

x	$y = 2x + 3$	y	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1) + 3$ $= -2 + 3 = 1$	1	$(-1,1)$
0	$y = 2 \cdot 0 + 3$ $= 0 + 3 = 3$	3	$(0,3)$
1	$y = 2 \cdot 1 + 3$ $= 2 + 3 = 5$	5	$(1,5)$



8. Από τις πιο κάτω γραφικές να βρείτε:

Λύση:

α) Τα σημεία τομής των ευθειών με τους άξονες των $y'y$ και $x'x$

Λύση: Πρώτο σχήμα:

Το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των $y'y$ είναι $(0 , 3)$

Το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των $x'x$ είναι $(6 , 0)$

Δεύτερο σχήμα:

Το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των $y'y$ είναι $(0 , 3)$

Το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των $x'x$ είναι $(\frac{3}{2} , 0)$

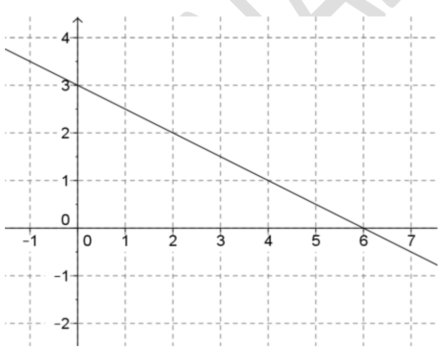
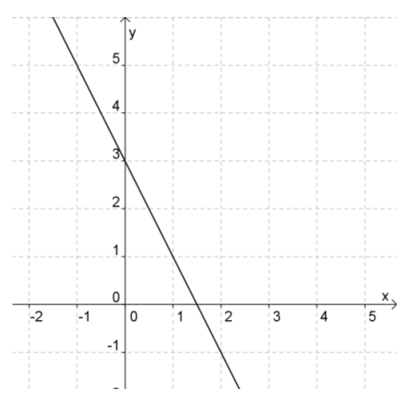
β) Την κλίση τους

Λύση:

Πρώτο σχήμα: $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

Δεύτερο σχήμα: $\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1,5} = -2$

γ) Την εξίσωση της κάθε ευθείας

Λύση:

Πρώτο σχήμα:

Η ευθεία **περνά από τα σημεία** $(6,0)$ **και** $(0,3)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Εξίσωση της ευθείας είναι: } y=\alpha x+\beta \\ (0,3)\end{array}\right\} \Rightarrow 3=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=3$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\alpha x+\beta \\ (6,0)\end{array}\right\} \Rightarrow 0=\alpha\cdot 6+3 \Leftrightarrow -3=6\alpha \Leftrightarrow 6\alpha=-3 \Leftrightarrow \frac{6\alpha}{6}=\frac{-3}{6} \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } y=-\frac{1}{2}x+3$$

Ή

Η ευθεία έχει κλίση $\lambda=-\frac{1}{2}$ **και περνά από το σημείο** $(0,3)$

Εξίσωση της ευθείας είναι: $y=\alpha x+\beta$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=-\frac{1}{2} \\ \lambda=\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\alpha x+\beta \\ (0,3)\end{array}\right\} \Rightarrow 3=-\frac{1}{2}\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=3$$

$$\text{Άρα } y=-\frac{1}{2}x+3$$

Δεύτερο σχήμα:

Η ευθεία περνά από τα σημεία $(1,1)$ και $(0,3)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Εξίσωση της ευθείας είναι: } y=\alpha x+\beta \\ (0,3)\end{array}\right\} \Rightarrow 3=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=3$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\alpha x+\beta \\ (1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow 1=\alpha\cdot 1+3 \Leftrightarrow 1-3=\alpha \Leftrightarrow \alpha=-2$$

$$\text{Άρα } y=-2x+3$$

Ή

Η ευθεία έχει κλίση $\lambda=-2$ και περνά από το σημείο $(0,3)$

Εξίσωση της ευθείας είναι: $y=\alpha x+\beta$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=-2 \\ \lambda=\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\alpha x+\beta \\ (0,3)\end{array}\right\} \Rightarrow 3=-2\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=3$$

$$\text{Άρα } y=-2x+3$$

9. α) Από τη πιο κάτω γραφική παράσταση να βρείτε την κλίση και την εξίσωση της ευθείας ε_1

Λύση:

$\lambda=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{3}=1$

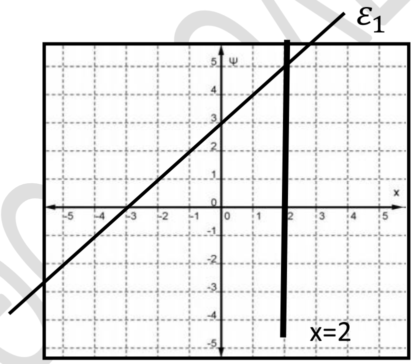
Εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\left.\begin{matrix} y = \alpha x + \beta \\ (0,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 = 1 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$$

$$\text{Άρα } \boldsymbol{y = x + 3}$$

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση της ευθείας $\varepsilon_2 \colon x = 2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από τις ευθείες ε_1, ε_2 και τον άξονα $x'x$

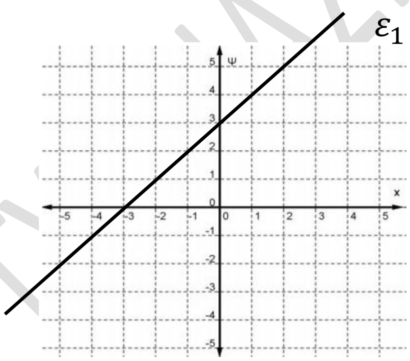


Λύση:

$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5\ \tau.\mu.$

γ) Για ποια τιμή του **μ** το σημείο $\left(\frac{2\mu+1}{3}, \mu - 1\right)$ ανήκει στην ευθεία ε_1

Λύση:



$\boldsymbol{y = x + 3}$

$\mu - 1 = \frac{2\mu+1}{3} + 3$

$3(\mu - 1) = 2\mu + 1 + 9$

$3\mu - 3 = 2\mu + 1 + 9$

$3\mu - 2\mu = 3 + 1 + 9$

$\mu = 13$

10. Δίνεται η ευθεία $y = (2\kappa + 4)x$. Να υπολογίσετε την τιμή του κ , αν η ευθεία

α) Έχει κλίση 4

Λύση:

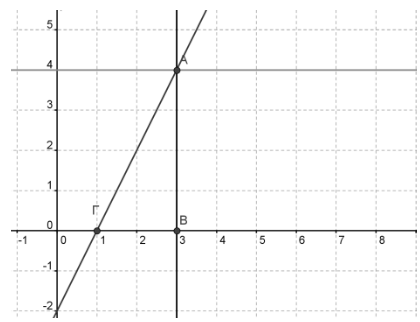
$$\left.\begin{aligned} y &= (2\kappa+4)x \\ \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{4} \\ \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{2\kappa+4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow 2\kappa + 4 = \mathbf{4} \Leftrightarrow 2\kappa = 4 - 4 \Leftrightarrow 2\kappa = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \kappa = \mathbf{0}$$

β) Περνά από το σημείο (1,6)

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} y &= (2\kappa+4)x \\ &(1,6) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 6 = (2\kappa+4)\cdot 1 \Leftrightarrow 2\kappa + 4 = \mathbf{6} \Leftrightarrow 2\kappa = \mathbf{6 - 4} \Leftrightarrow 2\kappa = \mathbf{2} \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} \Leftrightarrow \kappa = \mathbf{1}$$

11. Από το σχήμα να βρείτε:



(α) Τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και Γ

Λύση:

$A(3,4)$, $B(3.0)$ και $\Gamma(1,0)$

(β) Τις εξισώσεις των ευθειών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ

Λύση:

$AB: \; x = 3$, $B\Gamma: \; y = 0$

και $A\Gamma: \; y = \alpha x + \beta$

$\boldsymbol{\lambda} = \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$, το σημείο τομής της ευθείας με το άξονα y είναι (0,-2) άρα το $\beta = -2$

$A\Gamma: \; y = 2x - 2$

(γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Λύση:

$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{2\cdot 4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \; \tau.\mu$

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας:

α) Που διέρχεται από το σημείο $A\;(2, -3)$ και έχει κλίση $\lambda = 4$

Λύση:

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 4\\ \lambda = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 4$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}\\ (2,-3)\end{array}\right\} \Rightarrow -3 = 4\cdot 2 + \beta \Leftrightarrow -3 = 8 + \beta$$

$$\Leftrightarrow -3 - 8 = \beta \Leftrightarrow \beta = -11$$

$\boldsymbol{Άρα\;\; y = 4x - 11}$

β) Που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $\lambda = -2$

Λύση:

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = \alpha x}$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\lambda = -2}\\ \boldsymbol{\lambda = \alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = -2}$$

$\boldsymbol{Άρα\;\; y = -2x}$

γ) Που διέρχεται από τα σημεία $(6, -1)$ και $(3, 2)$

Λύση:

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-1)}{3-6} = \frac{2+1}{-3} = \frac{3}{-3} = -1}\\ \boldsymbol{\lambda = \alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}\\ (3,2)\end{array}\right\} \Rightarrow 2 = -1\cdot 3 + \beta \Leftrightarrow 2 = -3 + \beta$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3 = \beta \Leftrightarrow \beta = 5$$

$\boldsymbol{Άρα\;\; y = -1x + 5}$

δ) Που διέρχεται από το σημείο τομής της ευθείας $y = 2x + 1$ με τον άξονα των $x'x$ και έχει κλίση ίση με την κλίση της ευθείας $3x - \; y = 5$

Λύση:

Εξίσωση της ευθείας είναι: $\boldsymbol{y = \alpha x + \beta}$

$$3x - \; y = 5 \Leftrightarrow 3x - 5 = \; y \Leftrightarrow y = 3x - 5 \;\Rightarrow \lambda = 3 \;\; \kappa\alpha\iota\; \lambda = \alpha \Rightarrow \alpha = 3$$

Σημείο τομής της ευθείας $y = 2x + 1$ με τον άξονα των $x'x$ $\Rightarrow 0 = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow -1 = 2x \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow \text{ Σημείο τομής } \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y = \alpha x + \beta} \\ \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \beta \Leftrightarrow 0 = -\frac{3}{2} + \beta$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ά}\boldsymbol{\rho\alpha \;\; y = 3x + \frac{3}{2}}$$

13. Η τηλεφωνική εταιρεία η LEMESOSNET χρεώνει με πάγιο 500 σεντ το μήνα και 10 σεντ το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.

(α) Να βρείτε το συνολικό κόστος ψ που χρεώνει η εταιρεία ως συνάρτηση των λεπτών χ τηλεφωνικών κλήσεων στη μορφή ψ=αχ+β.

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} \psi = \alpha\chi + \beta \\ \alpha = 10 \\ \beta = 500 \end{array}\right\} \quad \psi = 10\chi + 500$$

(β) Αν κάποιος χρεώθηκε 13 € το περασμένο μήνα, να βρείτε πόσα λεπτά μίλησε τον Περασμένο μήνα στο τηλέφωνο συνολικά.

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} \psi = 10\chi + 500 \\ \psi = 13€ = 1300 \text{ σεντ} \end{array}\right\} \quad 1300 = 10\chi + 500 \Leftrightarrow 1300 - 500 = 10\chi \Leftrightarrow 800 = 10\chi$$

$$\Leftrightarrow \frac{800}{10} = \frac{10\chi}{10} \Leftrightarrow \chi = 80 \text{ λεπτά}$$

14. Μια εταιρεία παραγωγής φυσικών χυμών έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό πορτοκάλια που παίρνει από τον παραγωγό, παράγει 0,4 λίτρα χυμό.

(α) Πόσα λίτρα χυμού θα παραχθούν με 500 Kg πορτοκάλια;

Λύση: $500 \cdot 0{,}4 = 200$ λίτρα χυμό

(β) Να εκφράσετε με τύπο την ποσότητα $f(x)$ του χυμού (σε λίτρα) που παράγεται, ως συνάρτηση της ποσότητας x (σε κιλά) των πορτοκαλιών που χρειάζονται.

Λύση: $f(x) = 0{,}4 \cdot x$

(γ) Πόσα κιλά πορτοκάλια πρέπει να χρησιμοποιήσει η εταιρεία, ώστε η παραγωγή σε χυμό να είναι 300 λίτρα;

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 0{,}4 \cdot x \\ f(x) &= 300 \end{aligned}\right\} \qquad 300 = 0{,}4 \cdot x \Leftrightarrow \frac{300}{0{,}4} = \frac{0{,}4\chi}{0{,}4} \Leftrightarrow x = 750 \text{ κιλά πορτοκάλια}$$

Ενότητα 8: Στατιστική-Πιθανότητες

1. Η βαθμολογία στα 5 μαθήματα ενός μαθητή Λυκείου είναι:
   14, 16, 12, 18, 15. Να υπολογίσετε:

   (α) Τη μέση τιμή

   Λύση:

   $$\bar{X} = \frac{14+16+12+18+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

   (β) Τη διάμεσο

   Λύση:

   Η διάμεσος των παρατηρήσεων 12 , 14 , 15 ,16 ,18 είναι το 15

2. Η μέση τιμή των βαθμών 11 μαθητών σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά είναι 15. Οι βαθμοί είναι οι: 12, 20, α, 15,14, 19, β, 12, 17,16, 13.

   Λύση:

   (α) Να υπολογίσετε τα α και β αν το α είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το β

   $$\alpha = \beta + 3$$

   $$\bar{X} = \frac{12+20+\alpha+15+14+19+\beta+12+17+16+13}{11}$$

   $$\Leftrightarrow 15 = \frac{12+20+\beta+3+15+14+19+\beta+12+17+16+13}{11}$$

   $$\Leftrightarrow 15 = \frac{2\beta+141}{11}$$

   $$\Leftrightarrow 15 \cdot 11 = 2\beta + 141$$

   $$\Leftrightarrow 165 = 2\beta + 141$$

   $$\Leftrightarrow 165 - 141 = 2\beta$$

   $$\Leftrightarrow 24 = 2\beta$$

   $$\Leftrightarrow \frac{2\beta}{2} = \frac{24}{2}$$

   $$\Leftrightarrow \beta = 1$$

   $$\alpha = \beta + 3 = 12 + 3 = 15 \quad , \quad \beta = 12$$

   (β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο

   Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων 12, 20, 15, 15,14, 19, 12, 12, 17,16, 13 είναι το 12

   Η διάμεσος των παρατηρήσεων 12 ,12, 12 , 13, 14, 15, 15, 16, 17, 19, 20 είναι το 15

3. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αφού καταγραφεί ο δειγματικός χώρος, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

Λύση:

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

α) Β: Η ένδειξη και στα δύο ζάρια να είναι 6

Λύση:

$B = \{(6,6)\}$

$\Rightarrow P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{1}{36}$

β) Β: Τα ζάρια να έχουν ίδια ένδειξη

Λύση:

$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$\Rightarrow P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

γ) Γ: Η μια τουλάχιστον ένδειξη να είναι 3

Λύση:

$\Gamma = \{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(6,3),(3,6)\}$

$\Rightarrow P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{11}{36}$

δ) Δ: Το άθροισμα των δύο ενδείξεων να άρτιος

Λύση:

$\Delta =$
$\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5)(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$\Rightarrow P(\Delta) = \frac{\nu(\Delta)}{\nu(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

4. Τρία νομίσματα, ένα χάλκινο, ένα ασημί και ένα χρυσό τοποθετούνται σε ένα κουτί. Σε ένα πείραμα τύχης επιλέγουμε τυχαία ένα νόμισμα από το κουτί, το ρίχνουμε και καταγράφουμε πρώτα το χρώμα και ακολούθως την ένδειξη του.

   α) Να καταγράψετε τον δειγματικό χώρο (Ω) του πειράματος

   Λύση: $\Omega = \{(\chi\acute{\alpha}\lambda\kappa\iota\nu o, K), (\chi\acute{\alpha}\lambda\kappa\iota\nu o, \Gamma), (\alpha\sigma\eta\mu\acute{\iota}, K), (\alpha\sigma\eta\mu\acute{\iota}, \Gamma), (\chi\rho\upsilon\sigma\acute{o}, K), (\chi\rho\upsilon\sigma\acute{o}, \Gamma)\}$

   $\nu(\Omega)=6$

   β) Ποια είναι η πιθανότητα το νόμισμα να έχει χρώμα χάλκινο και ένδειξη κορώνα;

   Λύση: $P(\chi\rho\omega\mu\alpha\ \chi\alpha\lambda\kappa\iota\nu o\ \kappa\alpha\iota\ \acute{\varepsilon}\nu\delta\varepsilon\iota\xi\eta\ \kappa o\rho\acute{\omega}\nu\alpha) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{1}{6}$

5. Ένα κουτί περιέχει 3 μπάλες (1 άσπρη, 1 μαύρη, 1 κόκκινη). Ένα δεύτερο κουτί περιέχει αριθμημένες μπάλες από το 1 μέχρι το 7. Παίρνουμε στη τύχη μία μπάλα από το πρώτο κουτί και μία μπάλα από το δεύτερο κουτί.

   α) Να καταγράψετε το δειγματικό χώρο

   Λύση: $\Omega = \{(\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta, 1), (\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta, 2), (\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta, 3), (\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta, 4), (\acute{\alpha}\sigma\pi\rho\eta, 5), (\alpha\sigma\pi\rho\eta, 6), \dots \dots\}$

   $\nu(\Omega) = 3 \cdot 7 = 21$

   β) Να βρείτε την πιθανότητα να επιλέξουμε μαύρη μπάλα από το πρώτο κουτί και μπάλα με ζυγό αριθμό από το δεύτερο.

   Λύση: $P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$