

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\chi - 3)^2$

ε) $(7 + \sqrt{2})(7 - \sqrt{2})$

β) $(5\chi + 3\omega) \cdot (3\omega - 5\chi)$

στ) $\left(\frac{\alpha}{3} + 3\beta^2\right)^2$

γ) $(-5\chi^3 - 2\psi)^2$

ζ) $(\beta^4 + 1)(\beta^2 + 1)(\beta + 1)(\beta - 1)$

δ) $(2\chi + \omega)^2$

η) $\left(\frac{1}{2\chi} - \chi\right)^2$

2. Δίνεται η παράσταση $A = 2\chi(3\chi + 1)(3\chi - 1) - (3\chi - 2)^2$.

Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\chi = -2$

3. Αν $\chi = \frac{1}{\psi}$, να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του χ και ψ :

$$A = (5\chi - \psi)^2 - (5\chi - 3)(5\chi + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$$

4. Αν $2\chi + \phi = -5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

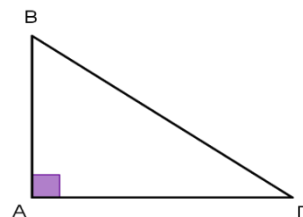
$$A = (2\chi - \phi)^2 + 7\chi\phi - \chi(2 - \phi) + 2\chi$$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$$

6. Αν $\chi \cdot \psi = 2$, να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα $\left(\frac{\chi - 2\psi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\chi + 2\psi}{3}\right)^2 = -\frac{16}{9}$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με $(3\chi + 1)$ cm και $(4\chi - 1)$ cm. Αν η υποτείνουσα του ισούται με 5χ cm, να βρείτε την τιμή του χ .



8. Αν $2x - 3y = 10$ και $3xy = -3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4x^2 + 9y^2$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Παραγοντοποίηση-Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Να κάνετε τις πιο κάτω διαιρέσεις:

α) $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x - 14) : (x - 2)$

β) $(2x^3 - x^2 + 7x + 5) : (x + 1)$

γ) $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 6) : (x^2 - 2x + 3)$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ που όταν διαιρεθεί με $x + 1$ δίνει πηλίκο $3x + 2$ και υπόλοιπο $-x + 3$.

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4x + 4\psi + 8\omega$

β) $3x - 3\psi - \omega x + \omega\psi$

γ) $9x^2 - 16\psi^2$

δ) $x^2 - x - 30$

ε) $25x^2 + 40x + 16$

στ) $\psi^3 - 25\psi$

ζ) $2x^2 - 14x + 20$

η) $-\psi^2 + 8\psi - 15$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2)$

β) $(x - 3\omega)^2 + (x - 3\omega) - 6$

γ) $x^2 - 6x + 9 - 2\beta x + 6\beta$

δ) $x^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4x$

ε) $16x^4 - 81\psi^4$

στ) $3\rho^2 - 3\omega^2 - \omega^2 - 2\rho\omega - \rho^2$

ζ) $\alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) - 25 + \alpha^2$

η) $x^2 - 6x\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2$

θ) $(x^2 - 6x + 3)^2 - (x - 9)^2$

$$\iota) 4(\chi - 1) + 9\chi^2(1 - \chi)$$

5. Αν $\chi = 101$ και $\psi = 99$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης.

$$A = 2\chi^3 + 6\chi\psi^2 - 2\psi^3 - 6\chi^2\psi$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \chi^2 - 8\chi = 0$$

$$\beta) \chi^2 - 64 = 0$$

$$\gamma) \chi^2 - 2\chi = 15$$

$$\delta) (\chi + 5)(\chi^2 - 2\chi - 3)(2\chi - 5) = 0$$

$$\epsilon) 25\psi^2 - 20\psi + 4 = 0$$

$$\sigma\tau) 2\chi^2 - \chi - 10 = 0$$

$$\zeta) 3(3\chi - 4) = \chi(\chi + 2)$$

$$\eta) 3\chi^2 - 5\chi + 4 = 0$$

7. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10}$$

$$\beta) \frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3}$$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\chi\psi^2}{\chi^2 + 3\chi - 18} \cdot \frac{4\chi + 24}{\chi\psi}$$

$$\beta) \frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{\chi^2 - 36} : \frac{3\chi - 6}{\chi^2 + 5\chi - 6}$$

$$\gamma) \frac{2\chi}{\chi^2 - 25} + \frac{1}{5 - \chi} - \frac{3}{\chi^2 + 5\chi}$$

$$\delta) \frac{3\chi^2 - 3}{\chi^3 + \chi^2 - 2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2 - 4} + \frac{1}{\chi + 2} \right)$$

9. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\frac{\chi}{\psi} - \frac{9\psi}{\chi}}{\frac{\chi^2 - 6\chi\psi}{\psi^2} + 9}$$

$$\beta) \frac{\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2}}$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{\chi - 2}{\chi} + \frac{4}{\chi - 2} = \frac{8}{\chi^2 - 2\chi}$$

$$\beta) \frac{y + 2}{y} = \frac{y + 3}{y + 4} - \frac{4}{y^2 + 4y}$$

$$\gamma) \frac{3}{y + 5} - \frac{y}{y - 5} = \frac{y^2 + 25}{25 - y^2}$$

$$\delta) \frac{2y}{y^2 + y} = 1 - \frac{2}{y + 1}$$

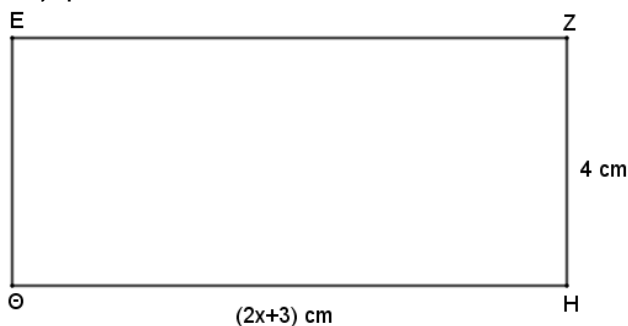
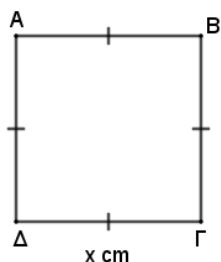
$$\epsilon) \frac{\rho}{\rho - 1} + \frac{6}{\rho^2 - 1} = 4$$

$$\sigma\tau) \frac{3}{\omega^2 - 3\omega - 4} = \frac{2\omega + 5}{\omega^3 + 2\omega^2 + \omega} + \frac{4}{\omega^2 - 4\omega}$$

Να λύσετε το πιο κάτω πρόβλημα με την χρήση εξίσωσης.

11. Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι 48. Αν ο ένας αριθμός είναι κατά δύο μικρότερος από τον άλλο αριθμό, να βρείτε τους δύο αριθμούς.

12. Αν το εμβαδόν του ορθογώνιου EZHΘ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε την τιμή του x.



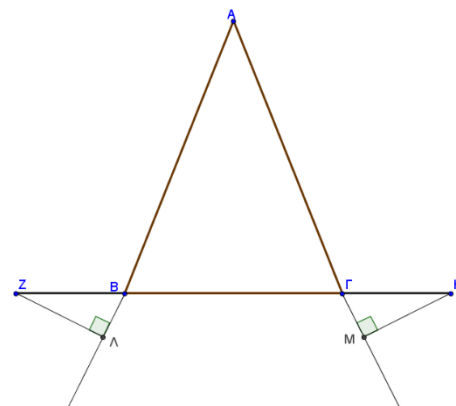
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία – Ίσα Τρίγωνα

1. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

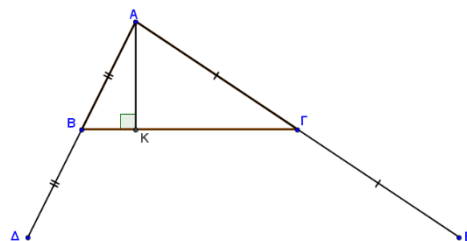
Α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα .	Σ	Λ
Β) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.	Σ	Λ
Γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και μία γωνία του ενός είναι ίση με την αντίστοιχή της στο άλλο τρίγωνο, τότε θα είναι ίσα.	Σ	Λ
Δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση μία προς μία, και έχουν μια κάθετη πλευρά τους αντίστοιχα ίση τότε θα είναι ίσα.	Σ	Λ

2. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$, η διάμεσος $ΑΔ$ είναι ύψος και διχοτόμος.
3. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$), M και $Λ$ είναι μέσα των πλευρών AB και $AΓ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :
- α)** $ΒΛ=ΓΜ$
- β)** Τα σημεία M και $Λ$ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά $BΓ$.

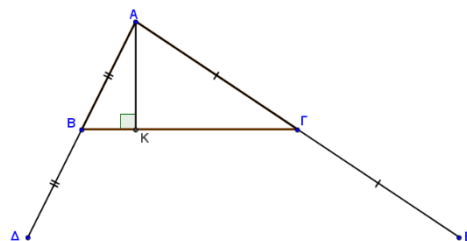
4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά τμήματα $BZ=GH$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $Z\Lambda$ και HM είναι οι αποστάσεις των σημείων Z και H από τις πλευρές AB και AG αντίστοιχα, να δείξετε ότι $Z\Lambda=HM$.



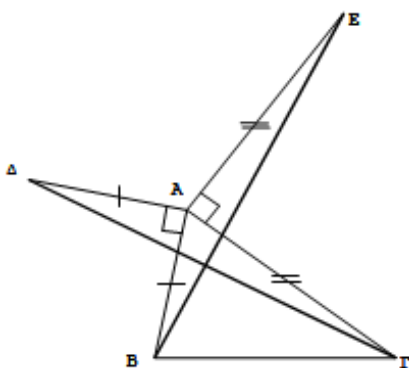
5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), αν K, Λ, M είναι μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, AG$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\Lambda K=\Lambda M$.



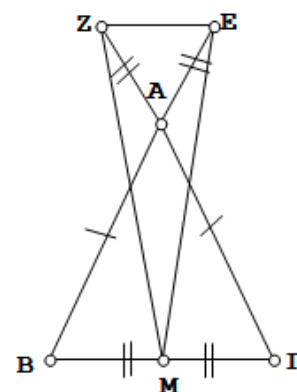
6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ύψος AK . Αν $AB=BD$ και $AG=GE$, να αποδείξετε ότι Δ και E ισαπέχουν από την $B\Gamma$.



7. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι τυχαίο τρίγωνο. Αν $A\Delta=AB$, $AE=AG$ και $A\Delta \perp AB$, $AE \perp AG$. Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta=BE$.



8. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB=AG$). Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $AZ=AE$, όπου AZ και AE είναι προεκτάσεις των AG και AB αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.

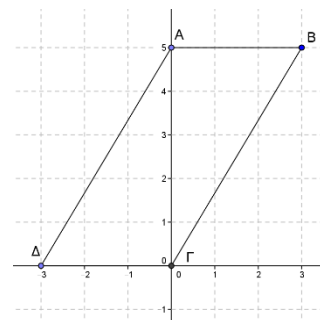


9. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) να φέρετε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:
- $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα
 - στο ίδιο τρίγωνο να προεκτείνετε τις διαμέσους ΓE και $B\Delta$ κατά τμήματα EZ , ΔH αντίστοιχα έτσι ώστε $EZ=\Delta H$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BZ\Gamma$ και $BH\Gamma$ είναι ίσα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ευθεία -Γραμμικά Συστήματα

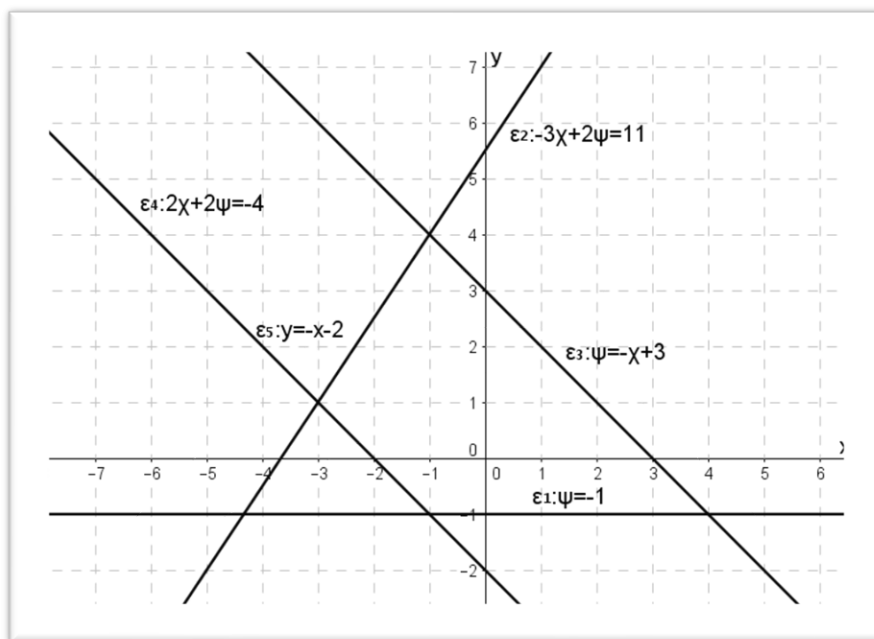
- Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων $A(-1, 1)$ και $B(3,4)$.
- Δίνονται τα σημεία $A(2,5)$ και $B(-2, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

- Από την διπλανή γραφική παράσταση να βρείτε:
 - τις συντεταγμένες των κορυφών A , B , Γ και Δ .
 - την εξίσωση των ευθειών AB και $B\Gamma$.



- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 στις πιο κάτω περιπτώσεις:
 - είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon_2: \psi = 2\chi - 1$ και τέμνει τον άξονα τον ψ στο $(0, -8)$.
 - περνά από το σημείο $A(2,3)$ και είναι κάθετη με στην ευθεία $\epsilon_2: 4\chi + 2\psi = 3$.
 - περνά από το σημείο $B(-5, 1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon_2: \psi = 2$
 - περνά από το σημείο $\Gamma(4, -2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\epsilon_2: \chi = -3$
 - περνά από το σημείο $\Delta(3, -6)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon_2: 3\chi - y = 5$

5. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(1,0) Β(2,4) και Γ(5, -1).
 α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ.
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΕ.
6. Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε οι ευθείες $\epsilon_1: y = 2x - 5$ και $\epsilon_2: y = (2\alpha - 7)x + 9$ να είναι παράλληλες.
7. Να εξετάσετε στις πιο κάτω περιπτώσεις, αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι **παράλληλες**, **ταυτίζονται** ή **τέμνονται**. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)
- α) $\epsilon_1: \psi = 2x + 5$
 $\epsilon_2: \psi = 3x + 7$
- β) $\epsilon_1: 18x + 6\psi = 8$
 $\epsilon_2: \psi = -3x + 7$
- γ) $\epsilon_1: \psi = 5x + 9$
 $\epsilon_2: \psi = 4$
- δ) $\epsilon_1: 3x = 6\psi - 12$
 $\epsilon_2: 2\psi - x = 4$
8. Χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, να εξετάσετε κατά πόσο τα ακόλουθα συστήματα έχουν μία λύση ή άπειρες λύσεις ή καμία λύση. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



α) $\epsilon_3: \psi = -x + 3$ $\epsilon_2: -3x + 2\psi = 11$	β) $\epsilon_4: 2x + 2\psi = -4$ $\epsilon_5: \psi = -x - 2$	γ) $\epsilon_3: \psi = -x + 3$ $\epsilon_5: \psi = -x - 2$	δ) $\epsilon_3: \psi = -x + 3$ $\epsilon_1: \psi = -1$
--	---	---	---

9. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3x - y = 12 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = -6 \\ \alpha - 2\beta = -5 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 3\varphi + 5\omega = 50 \\ 4\varphi + 3\omega = 41 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ x = 2(y + 1) \end{cases}$$

10. Δίνεται η ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$. Να βρείτε τα λ και μ ώστε η ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(2,5)$ και $(-1,-7)$.

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (a + \beta)x + 2a + \beta = 4$. Να βρείτε τους αριθμούς a και β ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις τους αριθμούς 2 ή -3 .

Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με την χρήση συστήματος.

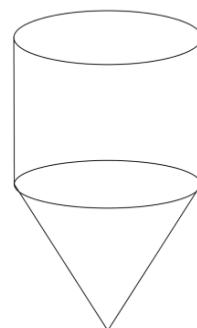
12. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες, να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

13. Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών, δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα του ενός ευρώ και πόσα των δύο ευρώ δέχεται ο κερματοδέκτης.

14. Στη χορωδία ενός σχολείου συμμετέχουν 52 μαθητές και μαθήτριες. Αν οι μαθήτριες είναι 10 περισσότερες από το διπλάσιο των μαθητών, να βρείτε πόσοι μαθητές και πόσες μαθήτριες συμμετέχουν στη χορωδία του σχολείου.

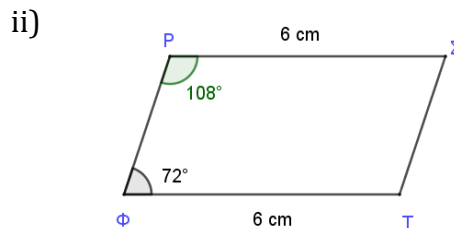
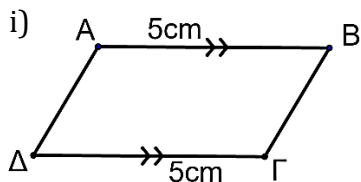
ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή 2m.
2. Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 5 m, 8 m και 10 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.
3. Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm . Αν το ύψος του πρίσματος είναι 20 cm να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.
4. Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 6 cm. Το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και τον όγκο του.
5. Κύλινδρος έχει όγκο $50\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 2 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.
6. Το μήκος της βάσης κώνου είναι $10\pi \text{ cm}$ και το ύψος του 12 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδό της κυρτής του επιφάνειας.
7. Η Γεωργία έχει 20 κυλινδρικά κεριά ύψους 5 cm με ακτίνα βάσης 2 cm. Πρόκειται να τα λιώσει για να κατασκευάσει κεριά σχήματος κύβου ακμής 2 cm. Πόσα κεριά που θα έχουν σχήμα κύβου θα κατασκευάσει, αν δεν έχει απώλεια πρώτης ύλης ;
8. Κύλινδρος έχει εμβαδό βάσης $16\pi \text{ cm}^2$ και εμβαδό ολικής επιφάνειας $80\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του.
9. Το διπλανό στερεό είναι αποθήκη σιτηρών, ανοικτή από πάνω και φτιαγμένη από λαμαρίνα κόστους 20€ το m^2 . Το ύψος του κυλίνδρου είναι 5 m και το ύψος του κώνου είναι 4 m .
 - α) Αν ο όγκος του στερεού είναι $57\pi \text{ m}^3$, να βρείτε το κόστος κατασκευής του.
 - β) Αν το στερεό είναι γεμάτο με σιτάρι και θα το μεταφέρουμε με φορτηγό σε άλλη αποθήκη, να υπολογίσετε πόσες διαδρομές θα κάνει το φορτηγό, του οποίου η καρότσα είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 5m, 3m και 1,8m.

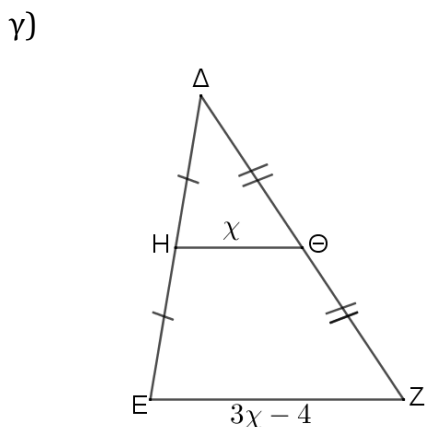
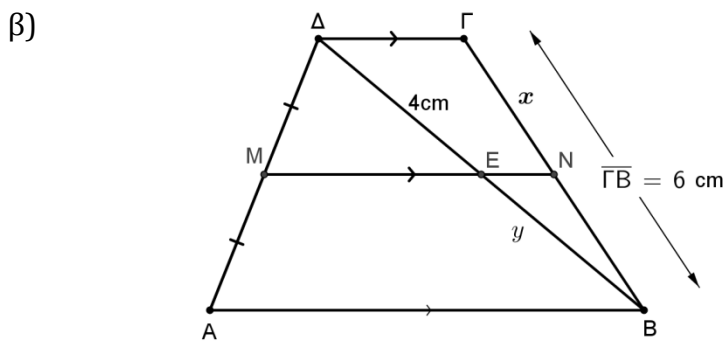
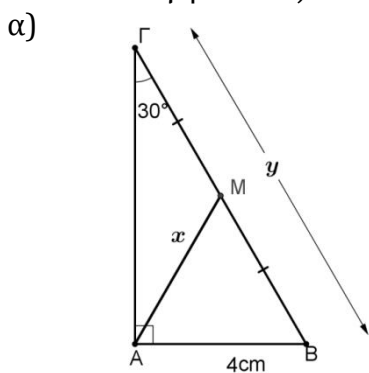


ΕΝΟΤΗΤΑ 10: Παραλληλόγραμμο και τραπέζια

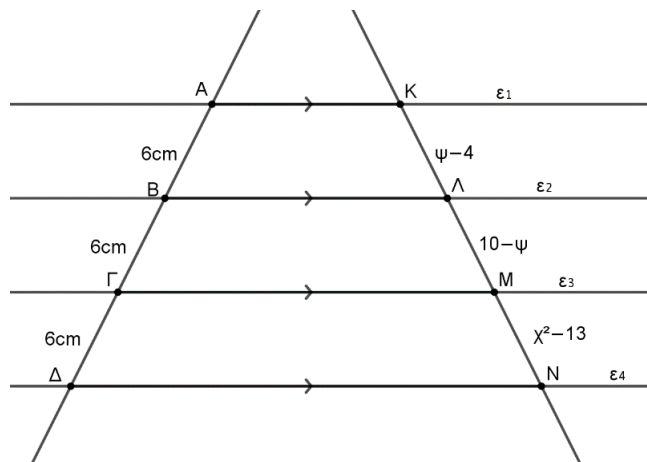
1. Να γράψετε το είδος των πιο κάτω τετράπλευρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



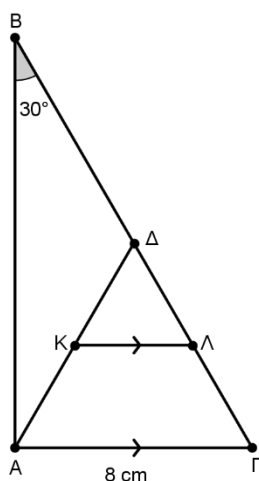
2. Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τις τιμές των x και y σε κάθε περίπτωση και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



δ)



3. Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$, το σημείο Δ είναι το μέσο της $BΓ$ και το σημείο K το μέσο της $AΔ$. Αν $KΛ \parallel AΓ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $AΓ = 8 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της $BΓ$, $AΔ$ και $KΛ$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Να προεκτείνετε τη $ΔΓ$ προς το μέρος του $Γ$ κατά τμήμα $ΔΓ=ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι $ABEΓ$ παραλληλόγραμμο.
5. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$, M είναι το μέσο της $AΔ$. Φέρουμε την BM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $BM=ME$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABDE$ είναι παραλληλόγραμμο.
6. Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $BΓ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα. Αν η EZ τέμνει τη διαγώνιο $AΓ$ στο H , να δείξετε ότι $ΓH = \frac{AΓ}{4}$.

