ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\chi-3)^2 = \chi^2 - 2\cdot\chi\cdot 3 + 3^2$
$= \chi^2 - 6\chi + 9$

β) $(5\chi+3\omega)\cdot(3\omega-5\chi) = (3\omega+5\chi)(3\omega-5\chi)$
$= (3\omega)^2 - (5\chi)^2$
$= 9\omega^2 - 25\chi^2$

γ) $(-5\chi^3-2\psi)^2 = [-(5\chi^3+2\psi)]^2 = (5\chi^3+2\psi)^2$
$= (5\chi^3)^2 + 2\cdot 5\chi^3\cdot 2\psi + (2\psi)^2$
$= 25\chi^6 + 20\chi^3\psi + 4\psi^2$

δ) $(2\chi+\omega)^2 = (2\chi)^2 + 2\cdot 2\chi\cdot\omega + \omega^2$
$= 4\chi^2 + 4\chi\omega + \omega^2$

ε) $(7+\sqrt{2})(7-\sqrt{2}) = 7^2 - (\sqrt{2})^2$
$= 49 - 2$
$= 47$

στ) $\left(\frac{\alpha}{3}+3\beta^2\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot 3\beta^2 + (3\beta^2)^2$
$= \frac{\alpha^2}{9} + 2\alpha\beta^2 + 9\beta^4$

ζ) $(\beta^4+1)(\beta^2+1)\underbrace{(\beta+1)(\beta-1)} = (\beta^4+1)\underbrace{(\beta^2+1)(\beta^2-1)}$
$= (\beta^4+1)(\beta^4-1)$
$= \beta^8 - 1$

η) $\left(\frac{1}{3\chi}-\chi\right)^2=\left(\frac{1}{3\chi}\right)^2+2\cdot\frac{1}{3\chi}\cdot\chi+(\chi)^2$

$=\frac{1}{9\chi^2}+\frac{2}{3}+\chi^2$

2. Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\boldsymbol{\chi=-2}$

$2\chi(3\chi+1)(3\chi-1)-(3\chi-2)^2$

$\mathrm{A}=2\chi(3\chi+1)(3\chi-1)-(3\chi-2)^2$

$=2\chi\,[(3\chi)^2-1^2]-[(3\chi)^2-2\cdot3\chi\cdot2+2^2]$

$=2\chi\,(9\chi^2-1)-(9\chi^2-12\chi+4)$

$=18\chi^3-9\chi^2+10\chi-4$

Για $\chi=-2$ τότε $\mathrm{A}=18(-2)^3-9(-2)^2+10(-2)-4$

$=\ 18\cdot8-9\cdot4-20-4$

$=\ 144-36-24$

$=144-60$

$=84$

3. Αν $\chi=\dfrac{1}{\psi}$, να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του $\boldsymbol{\chi}$ και $\boldsymbol{\psi}$:

$\mathrm{A}=(5\chi-\psi)^2-(5\chi-3)(5\chi+3)+4\psi-(\psi+2)^2$

$=(5\chi)^2-2\cdot5\chi\cdot\psi+\psi^2-[(5\chi)^2-3^2]+4\psi-(\psi^2+2\cdot\psi\cdot2+2^2)$

$=25\chi^2-10\chi\psi+\psi^2-(25\chi^2-9)+4\psi-\psi^2-4\psi-4$

$=25\chi^2-10\chi\psi+\psi^2-25\chi^2+9+4\psi-\psi^2-4\psi-4$

$=-10\chi\psi+5$

$=-10\cdot\frac{1}{\psi}\cdot\psi+5$ (αντικαθιστούμε $\chi=\frac{1}{\psi}$)

$=-10+5$

$=-5$

4. Αν $2\chi+\phi=-5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$\mathrm{A}=(2\chi-\varphi)^2+7\chi\varphi-\chi(2-\varphi)+2\chi$

$=(2\chi)^2-2\cdot2\chi\cdot\varphi+\varphi^2+7\chi\varphi-2\chi+\chi\varphi+2\chi$

$=4\chi^2-4\chi\varphi+\varphi^2+7\chi\varphi-2\chi+\chi\varphi+2\chi$

$=\ 4\chi^2+4\chi\varphi+\varphi^2=(2\chi+\varphi)^2\ =(-5)^2\ =+25$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3\alpha+2\beta)^2-5(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)-3\beta(8\alpha+5\beta)=(2\alpha-3\beta)^2$$

$$\begin{aligned}
\text{Α΄μέλος} &= (3\alpha+2\beta)^2-5(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)-3\beta(8\alpha+5\beta)\\
&=(3\alpha)^2+2\cdot3\alpha\cdot2\beta+(2\beta)^2-5\left[\alpha^2-(2\beta)^2\right]-24\beta\alpha-15\beta^2\\
&=9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2-5\left(\alpha^2-4\beta^2\right)-24\alpha\beta-15\beta^2\\
&=9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2-5\alpha^2+20\beta^2-24\alpha\beta-15\beta^2\\
&=4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

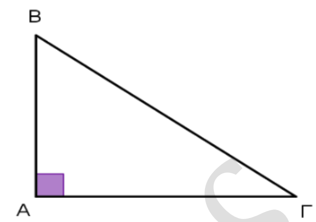
$$\begin{aligned}
\text{Β΄μέλος} &= (2\alpha-3\beta)^2\\
&=(2\alpha)^2-2\cdot2\alpha\cdot3\beta+(3\beta)^2\\
&=4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

Από (1) και (2) $\Longrightarrow$ $\text{Α΄μέλος} = \text{Β΄μέλος}$

6. Αν $\chi\cdot\psi=2$, να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα $\left(\frac{\chi-2\psi}{3}\right)^2-\left(\frac{\chi+2\psi}{3}\right)^2=-\frac{16}{9}$

$$\begin{aligned}
\text{Α΄ μέλος} &= \left(\frac{\chi-2\psi}{3}\right)^2-\left(\frac{\chi+2\psi}{3}\right)^2\\
&=\frac{(\chi-2\psi)^2}{3^2}-\frac{(\chi+2\psi)^2}{3^2}\\
&=\frac{\chi^2-2\cdot\chi\cdot2\psi+(2\psi)^2}{9}-\frac{\chi^2+2\cdot\chi\cdot2\psi+(2\psi)^2}{9}\\
&=\frac{\chi^2-4\chi\psi+4\psi^2}{9}-\frac{\chi^2+4\chi\psi+4\psi^2}{9}\\
&=\frac{\chi^2-4\chi\psi+4\psi^2-(\chi^2+4\chi\psi+4\psi^2)}{9}\\
&=\frac{\chi^2-4\chi\psi+4\psi^2-\chi^2-4\chi\psi-4\psi^2}{9}\\
&=\frac{-8\chi\psi}{9}\\
&=\frac{-8\cdot2}{9} \quad (\text{αντικαθιστούμε } \chi\psi=2)\\
&=-\frac{16}{9}=\text{Β΄μέλος}
\end{aligned}$$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με (3χ+1) cm και (4χ-1) cm. Αν η υποτείνουσα του ισούται με 5χ cm, να βρείτε την τιμή του χ.



Έστω ΑΓ= $3\chi + 1$, ΑΒ=$4\chi - 1$ και ΒΓ=5χ

Π.Θ. : $(ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2$

$\Leftrightarrow (3\chi + 1)^2 + (4\chi - 1)^2 = (5\chi)^2$

$\Leftrightarrow [(3\chi)^2 + 2 \cdot 3\chi \cdot 1 + 1^2] + [(4\chi)^2 - 2 \cdot 4\chi \cdot 1 + 1^2] = 25\chi^2$

$\Leftrightarrow 9\chi^2 + 6\chi + 1 + 16\chi^2 - 8\chi + 1 = 25\chi^2$

$\Leftrightarrow 9\chi^2 + 6\chi + 1 + 16\chi^2 - 8\chi + 1 - 25\chi^2 = 0$

$\Leftrightarrow 6\chi + 1 - 8\chi + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2\chi + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -2\chi = -2$

$\Leftrightarrow \chi = 1$

8. Αν $2x - 3y = 10$ και $3xy = -3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4x^2 + 9y^2$

$(2x - 3y)^2 = 10^2$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + 9y^2 = 10^2$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 12xy + 9y^2 = 100$
$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 100 + 12xy$ (Αντικαθιστούμε το $3xy$ με -3)
$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 100 + 4(-3)$
$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 100 - 12$
$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = -88$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Παραγοντοποίηση-Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Να κάνετε τις πιο κάτω διαιρέσεις:

α) $(\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi^2 - 3\chi - 14):(\chi - 2)$

$$
\begin{array}{r|l}
\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi^2 - 3\chi - 14 & \chi - 2 \\
\cline{2-2}
-\chi^4 + 2\chi^3 \qquad\qquad\qquad & \chi^3 + 5\chi + 7 \\
\cline{1-1}
+5\chi^2 - 3\chi - 14 & \\
-5\chi^2 + 10\chi \qquad & \\
\cline{1-1}
7\chi - 14 & \\
-7\chi + 14 & \\
\cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}
$$

β) $(2\chi^3 - \chi^2 + 7\chi + 5):(\chi + 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
2\chi^3 - \chi^2 + 7\chi + 5 & \chi + 1 \\
\cline{2-2}
-2\chi^3 - 2\chi^2 \qquad\qquad & 2\chi^2 - 3\chi + 10 \\
\cline{1-1}
-3\chi^2 + 7\chi + 5 & \\
+3\chi^2 + 3\chi \qquad & \\
\cline{1-1}
10\chi + 5 & \\
-10\chi - 10 & \\
\cline{1-1}
-5 \quad &
\end{array}
$$

γ) $(\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi^2 - 4\chi + 6):(\chi^2 - 2\chi + 3)$

$$
\begin{array}{r|l}
\chi^4 - 2\chi^3 + 5\chi^2 - 4\chi + 6 & \chi^2 - 2\chi + 3 \\
\cline{2-2}
-\chi^4 + 2\chi^3 - 3\chi^2 \qquad\qquad & \chi^2 + 2 \\
\cline{1-1}
+2\chi^2 - 4\chi + 6 & \\
-2\chi^2 + 4\chi - 6 & \\
\cline{1-1}
0 \quad &
\end{array}
$$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο f(x) που όταν διαιρεθεί με x+1 δίνει πηλίκο 3x+2 και υπόλοιπο –x+3.

$\delta(x) = x + 1$

$\pi(x) = 3x + 2$

$\upsilon(x) = -x + 3$

$\Delta(x) = \delta(x)\cdot \pi(x) + \upsilon(x)$

$f(x) = (x+1)\cdot(3x+2) + (-x+3)$

$= 3x^2 + 2x + 3x + 2 - x + 3$

$= 3x^2 + 4x + 5$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4\chi + 4\psi + 8\omega = 4(\chi + \psi + 2\omega)$

β) $3\chi - 3\psi - \omega\chi + \omega\psi = 3(\chi - \psi) - \omega(\chi - \psi) = (\chi - \psi)(3 - \omega)$

γ) $9\chi^2 - 16\psi^2 = (3\chi)^2 - (4\psi)^2 = (3\chi + 4\psi)(3\chi - 4\psi)$

δ) $\chi^2 - \chi - 30 = (\chi - 6)(\chi + 5)$

ε) $25\chi^2 + 40\chi + 16 = (5\chi)^2 + 2\cdot 5\chi \cdot 4 + 4^2 = (5\chi + 4)^2$

στ) $\psi^3 - 25\psi = \psi(\psi^2 - 25) = \psi(\psi + 5)(\psi - 5)$

ζ) $2\chi^2 - 14\chi + 20 = 2(\chi^2 - 7\chi + 10) = 2(\chi - 5)(\chi - 2)$

η) $-\psi^2 + 8\psi - 15 = -(\psi^2 - 8\psi + 15) = -(\psi - 5)(\psi - 3 = (5 - \psi)(\psi - 3)$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2) = \alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 + 2\beta$

$= \underbrace{\alpha^2 - \beta^2} - \underbrace{2\alpha + 2\beta}$

$= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - 2(\alpha - \beta)$

$= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2)$

β) $(\chi - 3\omega)^2 + (\chi - 3\omega) - 6 = [(\chi - 3\omega) + 3][(\chi - 3\omega) - 2] = (\chi - 3\omega + 3)(\chi - 3\omega - 2)$

γ) $\underbrace{\chi^2 - 6\chi + 9} - \underbrace{2\beta\chi + 6\beta} = (\chi - 3)^2 - 2\beta(\chi - 3)$

$= (\chi - 3)(\chi - 3 - 2\beta)$

δ) $\chi^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4\chi = \underbrace{\chi^2 - 4\chi + 4} - \underbrace{9\psi^2 - 6\psi - 1}$

$$= (\chi-2)^2-(9\psi^2+6\psi+1)$$

$$= (\chi-2)^2-(3\psi+1)^2$$

$$= (\chi-2+3\psi+1)\,[(\chi-2)-(3\psi+1)]$$

$$= (\chi-1+3\psi)\,(\chi-2-3\psi-1)$$

$$= (\chi-1+3\psi)\,(\chi-3-3\psi)$$

ε) $16\chi^4-81\psi^4 = (4\chi^2)^2-(9\psi^2)^2$

$$= (4\chi^2+9\psi^2)\,(4\chi^2-9\psi^2)$$

$$= (4\chi^2+9\psi^2)\,[(2\chi)^2-(3\psi)^2]$$

$$= (4\chi^2+9\psi^2)(2\chi+3\psi)\,(2\chi-3\psi)$$

στ) $\underbrace{3\rho^2-3\omega^2}\,-\underbrace{\omega^2-2\rho\omega-\rho^2} = 3(\rho^2-\omega^2)-(\rho^2+2\rho\omega+\omega^2)$

$$= 3(\rho+\omega)(\rho-\omega)-(\rho+\omega)^2$$

$$= (\rho+\omega)\,[3(\rho-\omega)-(\rho+\omega)]$$

$$= (\rho+\omega)(3\rho-3\omega-\rho-\omega)$$

$$= (\rho+\omega)(2\rho-4\omega)$$

$$= (\rho+\omega)\cdot 2\cdot(\rho-2\omega)$$

$$= 2(\rho+\omega)(\rho-2\omega)$$

ζ) $\alpha^2(\alpha-5)+(\alpha-5)(3\alpha-2)-25+\alpha^2 = \alpha^2(\alpha-5)+(\alpha-5)(3\alpha-2)+\underbrace{\alpha^2-25}$

$$= \alpha^2(\alpha-5)+(\alpha-5)(3\alpha-2)+(\alpha+5)(\alpha-5)$$

$$= (\alpha-5)[\alpha^2+(3\alpha-2)+(\alpha+5)]$$

$$= (\alpha-5)(\alpha^2+4\alpha+3)$$

$$= (\alpha-5)(\alpha+3)(\alpha+1)$$

η) $\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2-4\omega^2 = (\chi-3\psi)^2-(2\omega)^2 = (\chi-3\psi+2\omega)\,(\chi-3\psi-2\omega)$

θ) $(\chi^2-6\chi+3)^2-(\chi-9)^2 = [(\chi^2-6\chi+3)+(\chi-9)]\,[(\chi^2-6\chi+3)-(\chi-9)]$

$$= (\chi^2-5\chi-6)(\,\chi^2-6\chi+3-\chi+9)$$

$$= (\chi^2-5\chi-6)(\,\chi^2-7\chi+12)$$

$$= (\chi-6)(\chi+1)(\chi-3)(\chi-4)$$

ι) $4(\chi-1)+9\chi^2(1-\chi) = 4(\chi-1)-9\chi^2(\chi-1)$

$= (\chi-1)(4-9\chi^2)$

$= (\chi-1)[\,2^2-(3\chi)^2]$

$= (\chi-1)(2+3\chi)\,(2-3\chi)$

5. Αν χ= 101 και ψ= 99 , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης.

$$A = 2\chi^3+6\chi\psi^2-2\psi^3-6\chi^2\psi = \underbrace{2\chi^3-2\psi^3}+\underbrace{6\chi\psi^2-6\chi^2\psi}$$

$$= 2(\chi^3-\psi^3)+6\chi\psi(\psi-\chi)$$

$$= 2(\chi-\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)-6\chi\psi(\chi-\psi)$$

$$= 2(\chi-\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2-3\chi\psi)$$

$$= 2(\chi-\psi)(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)$$

$$= 2(\chi-\psi)(\chi-\psi)^2$$

$$= 2(\chi-\psi)^3$$

Για χ= 101 και ψ= 99 τότε $A = 2(\chi-\psi)^3 = 2(101-99)^3 = 2\cdot 2^3 = 2\cdot 8 = 16$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi^2-8\chi=0$

$\Leftrightarrow \chi(\chi-8)=0$

$\Leftrightarrow \chi=0$ ή $\chi-8=0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\chi=0}$ ή $\boldsymbol{\chi=8}$

β) $\chi^2-64=0$

$\Leftrightarrow (\chi+8)(\chi-8)=0$

$\Leftrightarrow \chi+8=0$ ή $\chi-8=0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\chi=-8}$ ή $\boldsymbol{\chi=8}$

γ) $\chi^2-2\chi=15$

$\Leftrightarrow \chi^2-2\chi-15=0$

$\Leftrightarrow (\chi+3)(\chi-5)=0$

$\Leftrightarrow \chi+3=0$ ή $\chi-5=0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\chi=-3}$ ή $\boldsymbol{\chi=5}$

δ) $(\chi+5)\,(\chi^2-2\chi-3)(2\chi-5)=0$

$\Leftrightarrow \chi+5=0$ ή $\chi^2-2\chi-3=0$ ή $2\chi-5=0$

$\Leftrightarrow \chi=-5$ ή $(\chi-3)(\chi+1)=0$ ή $\chi=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \chi=-5$ ή $\chi-3=0$ ή $\chi+1=0$ ή $\chi=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\chi=-5}$ ή $\boldsymbol{\chi=3}$ ή $\boldsymbol{\chi=-1}$ ή $\boldsymbol{\chi=\frac{5}{2}}$

ε) $25\psi^2-20\psi+4=0$

$\Leftrightarrow (5\psi-2)^2=0$

$\Leftrightarrow 5\psi-2=0$

στ) $2\chi^2-\chi-10=0$

$\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=-10$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-10)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\psi = \frac{2}{5}}$ (διπλή ρίζα)

$= 1 + 80 = 81 > 0$

$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 9}{4}$

$\boldsymbol{\chi_1} = \frac{1+9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ ή $\boldsymbol{\chi_2} = \frac{1-9}{4} = \frac{-8}{4} = \boldsymbol{-2}$

ζ) $3(3\chi - 4) = \chi(\chi + 2)$

$\Leftrightarrow 9\chi - 12 = \chi^2 + 2\chi$

$\Leftrightarrow \chi^2 + 2\chi - 9\chi + 12 = 0$

$\Leftrightarrow \chi^2 - 7\chi + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (\chi - 3)(\chi - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \chi - 3 = 0$ ή $\chi - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\chi = 3}$ ή $\boldsymbol{\chi = 4}$

η) $3\chi^2 - 5\chi + 4 = 0$

$\alpha = 3, \ \beta = -5, \ \gamma = +4$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4$

$= 25 - 48$

$= -23 < 0$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

7. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\frac{\chi^2-25}{2\chi-10} = \frac{(\chi+5)\cancel{(\chi-5)}}{2\cancel{(\chi-5)}} = \frac{(\chi+5)}{2}$ ορίζεται όταν, $2(\chi - 5) \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 5$

β) $\frac{5\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta-\alpha\beta^3} = \frac{5\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)} = \frac{5\cancel{\alpha\beta}\cancel{(\alpha-\beta)}}{\cancel{\alpha\beta}(\alpha+\beta)\cancel{(\alpha-\beta)}} = \frac{5}{\alpha+\beta}$ ορίζεται όταν, $\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \neq 0 \Leftrightarrow$
$\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq -\beta$ και $\alpha \neq \beta$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\chi\psi^2}{\chi^2+3\chi-18} \cdot \frac{4\chi+24}{\chi\psi} = \frac{\chi\psi^2}{(\chi-3)(\chi+6)} \cdot \frac{4(\chi+6)}{\chi\psi} = \frac{4\psi}{\chi-3}$

β) $\frac{\chi^2-8\chi+12}{\chi^2-36} : \frac{3\chi-6}{\chi^2+5\chi-6} = \frac{(\chi-2)(\chi-6)}{(\chi-6)(\chi+6)} : \frac{3(\chi-2)}{(\chi+6)(\chi-1)} = \frac{(\chi-2)(\chi-6)}{(\chi-6)(\chi+6)} \cdot \frac{(\chi+6)(\chi-1)}{3(\chi-2)} = \frac{(\chi-1)}{3}$

γ) $\frac{2\chi}{\chi^2-25} + \frac{1}{5-\chi} - \frac{3}{\chi^2+5\chi} = \frac{\overset{\chi}{\overline{2\chi}}}{(\chi+5)(\chi-5)} - \frac{\overset{\chi(\chi+5)}{\overline{1}}}{\chi-5} - \frac{\overset{(\chi-5)}{\overline{3}}}{\chi(\chi+5)}$ Ε. Κ. Π. $= \chi(\chi+5)(\chi-5)$

$$= \frac{2\chi^2 - \chi(\chi+5) - 3(\chi-5)}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{2\chi^2 - \chi^2 - 5\chi - 3\chi + 15}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{\chi^2 - 8\chi + 15}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{(\chi-3)(\chi-5)}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{(\chi-3)}{\chi(\chi+5)}$$

δ) $\frac{3\chi^2-3}{\chi^3+\chi^2-2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2-4} + \frac{1}{\chi+2}\right) = \frac{3(\chi^2-1)}{\chi(\chi^2+\chi-2)} : \left(\frac{3}{(\chi+2)(\chi-2)} + \frac{1}{\chi+2}\right)$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} : \left(\frac{3}{(\chi+2)(\chi-2)} + \frac{\overset{(\chi-2)}{1}}{\chi+2}\right) \qquad \text{Ε.Κ.Π.} = (\chi+2)(\chi-2)$$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} : \frac{3+(\chi-2)}{(\chi+2)(\chi-2)}$$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} : \frac{\chi+1}{(\chi+2)(\chi-2)}$$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} \cdot \frac{(\chi+2)(\chi-2)}{\chi+1}$$

$$= \frac{3(\chi-2)}{\chi}$$

9. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $\dfrac{\frac{\chi}{\psi} - \frac{9\psi}{\chi}}{\frac{\chi^2-6\chi\psi}{\psi^2} + 9} = \dfrac{\frac{\chi^2-9\psi^2}{\chi\psi}}{\frac{\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2}{\psi^2}} = \frac{\chi^2-9\psi^2}{\chi\psi} : \frac{\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2}{\psi^2}$

$$= \frac{(\chi+3\psi)(\chi-3\psi)}{\chi\psi} \cdot \frac{\psi^2}{\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2}$$

$$= \frac{(\chi+3\psi)(\chi-3\psi)}{\chi\psi} \cdot \frac{\psi^2}{(\chi-3\psi)^2}$$

$$= \frac{\psi(\chi+3\psi)}{\chi(\chi-3\psi)}$$

β) $\dfrac{\frac{\chi^2-16}{\chi^2+3\chi-4}}{\frac{\chi^2-4\chi}{\chi^2}} = \frac{\chi^2-16}{\chi^2+3\chi-4} : \frac{\chi^2-4\chi}{\chi^2} = \frac{(\chi+4)(\chi-4)}{(\chi+4)(\chi-1)} \cdot \frac{\chi^2}{\chi(\chi-4)} = \frac{\chi}{\chi-1}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{\chi-2}{\chi}+\frac{4}{\chi-2}=\frac{8}{\chi^2-2\chi} \Leftrightarrow \frac{\overset{\chi-2}{\chi-2}}{\chi}+\frac{\overset{\chi}{4}}{\chi-2}=\frac{\overset{1}{8}}{\chi(\chi-2)}$

$\text{Ε.Κ.Π.} = \chi(\chi-2) \neq 0 \Leftrightarrow$
$\chi \neq 0 \text{ και } \chi \neq 2$

$\Leftrightarrow (\chi-2)^2+4\chi=8$

$\Leftrightarrow \chi^2-4\chi+4+4\chi-8=0$

$\Leftrightarrow \chi^2+4-8=0$

$\Leftrightarrow \chi^2-4=0$

$\Leftrightarrow (\chi+2)(\chi-2)=0$

$\Leftrightarrow \chi+2=0 \text{ ή } \chi-2=0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\chi=-2}$ ή $\boldsymbol{\chi=2}$
δεκτή απορρίπτεται

β) $\frac{y+2}{y}=\frac{y+3}{y+4}-\frac{4}{y^2+4y} \Leftrightarrow \frac{\overset{y+4}{y+2}}{y}=\frac{\overset{y}{y+3}}{y+4}-\frac{\overset{1}{4}}{y(y+4)}$

$\text{Ε.Κ.Π.} = y(y+4) \neq 0 \Leftrightarrow$
$y \neq 0 \text{ και } y \neq -4$

$\Leftrightarrow (y+2)(y+4)=y(y+3)-4$

$\Leftrightarrow y^2+4y+2y+8=y^2+3y-4$

$\Leftrightarrow y^2+4y+2y+8-y^2-3y+4=0$

$\Leftrightarrow 3y+12=0$

$\Leftrightarrow 3y=-12$

$\Leftrightarrow y=-4$ απορρίπτεται

γ) $\frac{3}{y+5}-\frac{y}{y-5}=\frac{y^2+25}{25-y^2} \Leftrightarrow \frac{3}{y+5}-\frac{y}{y-5}=\frac{y^2+25}{-(y^2-25)}$

$\Leftrightarrow \frac{\overset{y-5}{3}}{y+5}-\frac{\overset{y+5}{y}}{y-5}=-\frac{\overset{1}{y^2+25}}{(y+5)(y-5)}$

$\text{Ε.Κ.Π.} = (y-5)(y+5) \neq 0 \Leftrightarrow$
$y \neq 5 \text{ και } y \neq -5$

$\Leftrightarrow 3(y-5)-y(y+5)=-(y^2+25)$
$\Leftrightarrow 3y-15-y^2-5y=-y^2-25$
$\Leftrightarrow 3y-15-y^2-5y=-y^2-25$
$\Leftrightarrow 3y-15-y^2-5y+y^2+25=0$
$\Leftrightarrow -2y+10=0$
$\Leftrightarrow -2y=-10$
$\Leftrightarrow y=5$ απορρίπτεται

δ) $\frac{2y}{y^2+y} = 1 - \frac{2}{y+1} \Leftrightarrow \frac{\overset{1}{2y}}{y(y+1)} = \overset{y(y+1)}{1} - \frac{\overset{y}{2}}{y+1}$

$\text{Ε.Κ.Π.} = y(y+1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$y \neq 0 \text{ και } y \neq -1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 2y = y(y+1) - 2y \\
&\Leftrightarrow 2y = y^2 + y - 2y \\
&\Leftrightarrow 2y - y^2 - y + 2y = 0 \\
&\Leftrightarrow -y^2 + 3y = 0 \\
&\Leftrightarrow -y(y-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ή} \quad y - 3 = 0
\end{aligned}$$

απορρίπτεται $\quad y = 3$ δεκτή

ε) $\frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{\rho^2-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{(\rho+1)(\rho-1)} = 4$

$\text{Ε.Κ.Π.} = (\rho+1)(\rho-1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\rho \neq -1 \text{ και } \rho \neq 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \rho(\rho+1) + 6 = 4(\rho+1)(\rho-1) \\
&\Leftrightarrow \rho^2 + \rho + 6 = 4(\rho^2 - 1) \\
&\Leftrightarrow \rho^2 + \rho + 6 = 4\rho^2 - 4 \\
&\Leftrightarrow \rho^2 + \rho + 6 - 4\rho^2 + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow -3\rho^2 + \rho + 10 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3\rho^2 - \rho - 10 = 0
\end{aligned}$$

$\alpha = 3, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -10$

$$\begin{aligned}
\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma &= (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) \\
&= 1 + 120 \\
&= 121 > 0
\end{aligned}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 11}{6} \begin{cases} \rho_1 = \frac{1+11}{4} = \frac{12}{4} = \mathbf{4} \quad \text{δεκτή} \\ \text{ή} \\ \rho_2 = \frac{1-11}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} \quad \text{δεκτή} \end{cases}$$

στ) $\frac{3}{\omega^2-3\omega-4}=\frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega}+\frac{4}{\omega^2-4\omega} \Leftrightarrow \frac{3}{(\omega-4)(\omega+1)}=\frac{2\omega+5}{\omega(\omega^2+2\omega+1)}+\frac{4}{\omega(\omega-4)}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{(\omega-4)(\omega+1)}=\frac{2\omega+5}{\omega(\omega^2+2\omega+1)}+\frac{4}{\omega(\omega-4)}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{(\omega-4)(\omega+1)}=\frac{2\omega+5}{\omega(\omega+1)^2}+\frac{4}{\omega(\omega-4)}$

$\Leftrightarrow \frac{\overset{\omega(\omega+1)}{3}}{(\omega-4)(\omega+1)}=\frac{\overset{\omega-4}{2\omega+5}}{\omega(\omega+1)^2}+\frac{\overset{(\omega+1)^2}{4}}{\omega(\omega-4)}$ $\text{Ε. Κ. Π.}=\omega(\omega+1)^2(\omega-4)$

$\omega\neq 0,\ \omega\neq -1$ και $\omega\neq 4$

$\Leftrightarrow 3\omega(\omega+1)=(\omega-4)(2\omega+5)+4(\omega+1)^2$

$\Leftrightarrow 3\omega^2+3\omega=2\omega^2+5\omega-8\omega-20+4(\omega^2+2\omega+1)$

$\Leftrightarrow 3\omega^2+3\omega=2\omega^2+5\omega-8\omega-20+4\omega^2+8\omega+4$

$\Leftrightarrow 2\omega^2+5\omega-8\omega-20+4\omega^2+8\omega+4-3\omega^2-3\omega=0$

$\Leftrightarrow 3\omega^2+2\omega-16=0$

$\alpha=3,\ \ \beta=2,\ \ \gamma=-16$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot3\cdot(-16)$

$=4+192$

$=196>0$

$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm14}{6}$

$\omega_1=\frac{-2+14}{6}=\frac{12}{6}=\mathbf{2}$ δεκτή

ή

$\omega_2=\frac{-2-14}{6}=\frac{-16}{6}=-\frac{8}{3}$ δεκτή

11. γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι 48. Αν ο ένας αριθμός είναι κατά δύο μικρότερος από τον άλλο αριθμό, να βρείτε τους δύο αριθμούς.

$x\cdot y=48$

$x=y-2$

$\Leftrightarrow (y-2)y=48$

$\Leftrightarrow y^2-2y=48$

$\Leftrightarrow y^2-2y-48=0$

$\Leftrightarrow (y+6)(y-8)=0$

$\Leftrightarrow y=-6$ *απορρίπτεται*

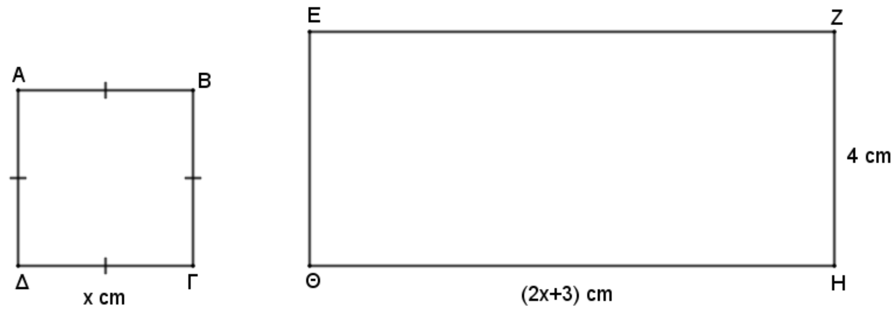
ή $y=8$ *δεκτή*

Άρα $x=8-2$

$\Leftrightarrow x=6$

Λύση: $(x,y)=(6,8)$

12. Αν το εμβαδόν του ορθογώνιου ΕΖΗΘ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε την τιμή του x.



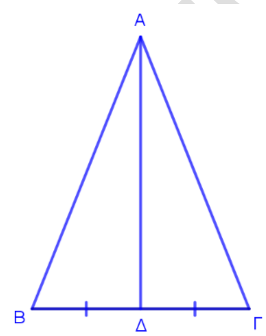
$$E_{\{o\rho\theta\}} = 4 \cdot E_{\{\tau\varepsilon\tau\rho\}}$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)\cdot 4 = 4 \cdot x^2$$
$$\Leftrightarrow 8x + 12 = 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}$$
$$\text{ή } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία –Ίσα Τρίγωνα

1. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(**Σ**) ή Λάθος(**Λ**) τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

Α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα .	Σ	Λ
Β) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.	Σ	Λ
Γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και μία γωνία του ενός είναι ίση με την αντίστοιχή της στο άλλο τρίγωνο, τότε θα είναι ίσα.	Σ	Λ
Δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση μία προς μία, και έχουν μια κάθετη πλευρά τους αντίστοιχα ίση τότε θα είναι ίσα.	Σ	Λ

2. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος.



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ,

1. ΑΒ=ΑΓ (ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο) Π
2. ΑΔ κοινή πλευρά Π
3. ΒΔ=ΔΓ (ΑΔ διάμεσος) Π

Έχουμε κριτήριο Π-Π-Π

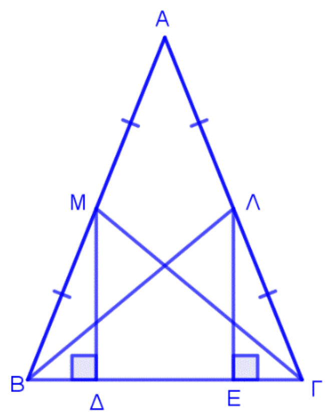
$\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}\Delta = A\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$

όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα

$\Rightarrow B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma \Rightarrow$ ΑΔ διχοτόμος του $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$

Από τη ισότητα των πιο πάνω τριγώνων $B\hat{\Delta}A = \Gamma\hat{\Delta}A$ και επειδή $B\hat{\Delta}A + \Gamma\hat{\Delta}A = 180°$ τότε $B\hat{\Delta}A = \Gamma\hat{\Delta}A = 90°$. Επομένως ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), Μ και Λ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :
α) ΒΛ=ΓΜ
β) Τα σημεία Μ και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά ΒΓ.



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΛ και ΑΓΜ,

1. ΑΒ=ΑΓ (ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο) Π

2. $\hat{A}$ κοινή γωνία Γ

3. ΑΛ=ΑΜ (ΑΒ=ΑΓ, Μ μέσο ΑΒ και Λ μέσο ΑΓ) Π
μισά ίσων πλευρών

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$\Rightarrow \overset{\Delta}{AB\Lambda} = \overset{\Delta}{A\Gamma M}$
⇒ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
⇒ ΒΛ=ΓΜ

β) φέρουμε τις αποστάσεις ΜΔ και ΛΕ στην ΒΓ.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΓΛΕ,

1. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) Γ

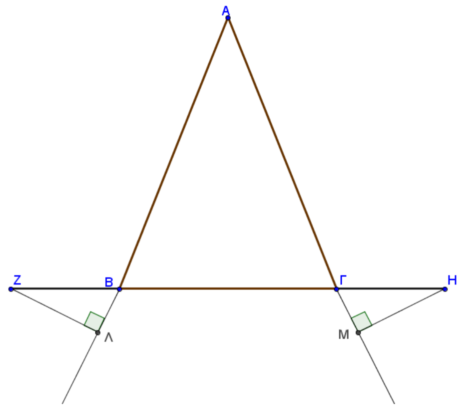
2. ΜΒ=ΛΓ (ΑΒ=ΑΓ, Μ μέσο ΑΒ και Λ μέσο ΑΓ) Π
μισά ίσων πλευρών

3. $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90°$ (ΜΔ⊥ΒΓκαι ΛΕ⊥ΒΓ) Ο

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Ο

$\Rightarrow \overset{\Delta}{BM\Delta} = \overset{\Delta}{\Gamma\Lambda E}$
⇒ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
⇒ ΜΔ=ΛΕ
Άρα τα σημεία Μ και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά ΒΓ

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ κατά τμήματα ΒΖ=ΓΗ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ΖΛ και ΗΜ είναι οι αποστάσεις των σημείων Ζ και Η από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΖΛ=ΗΜ.



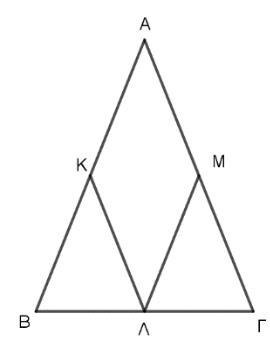
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΖΛ και ΓΗΜ,

1. ΒΖ=ΓΗ (δεδ.) Π
2. $Z\widehat{B}\Lambda = \Gamma\widehat{H}M$ ($A\widehat{B}\Gamma = A\widehat{\Gamma}B$ παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου
$A\widehat{B}\Gamma = Z\widehat{B}\Lambda$ και $A\widehat{\Gamma}B = H\widehat{\Gamma}M$ κατακορυφήν) Γ
3. $\widehat{\Lambda} = \widehat{M} = 90°$ (ΖΛ⊥ΑΒ και ΗΜ⊥ΑΓ) Ο

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Ο

$\Rightarrow B\overset{\Delta}{Z}\Lambda = \Gamma\overset{\Delta}{H}M$
⇒ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
⇒ ΖΛ=ΗΜ

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), αν Κ, Λ, Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΛΚ=ΛΜ.



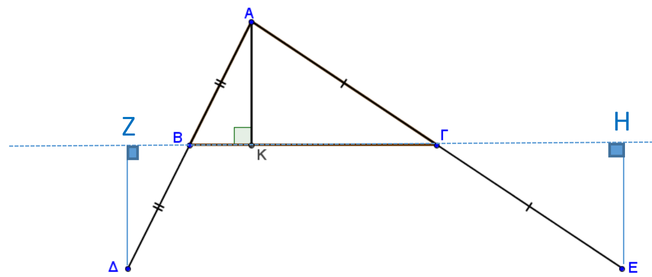
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΚΛ και ΓΜΛ,

1. ΚΒ=ΜΓ (ΑΒ=ΑΓ, Κ μέσο ΑΒ και Μ μέσο ΑΓ) Π
μισά ίσων πλευρών
2. $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) Γ
3. ΒΛ = ΛΓ (Λ μέσο ΒΓ) Π

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$\Rightarrow B\overset{\Delta}{K}\Lambda = \Gamma\overset{\Delta}{M}\Lambda$
⇒ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
⇒ ΛΚ=ΛΜ

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ύψος ΑΚ. Αν ΑΒ=ΒΔ και ΑΓ=ΓΕ, να αποδείξετε ότι Δ και Ε ισαπέχουν από την ΒΓ



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΖΔ και ΒΚΑ,

1. ΑΒ=ΒΔ (δεδ.) Π
2. $Z\hat{B}\Delta = A\hat{B}K$ (κατακορυφήν γωνίες) Γ
3. $\hat{Z} = \hat{K} = 90°$ (ΔΖ⊥ΒΓκαι ΑΚ ύψος) Ο

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Ο

$\Rightarrow B\overset{\Delta}{Z}\Delta = B\overset{\Delta}{K}A$
⇒ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
⇒ ΖΔ=ΑΚ (1)

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΚΓ και ΓΗΕ,

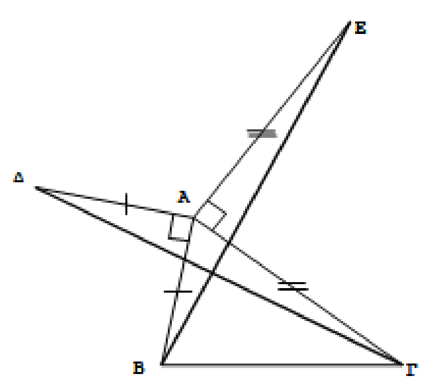
1. ΑΓ=ΓΕ (δεδ.) Π
2. $A\hat{\Gamma}K = H\hat{\Gamma}E$ (κατακορυφήν γωνίες) Γ
3. $\hat{K} = \hat{H} = 90°$ (ΕΗ⊥ΒΓ και ΑΚ ύψος) Ο

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Ο

$\Rightarrow A\overset{\Delta}{K}\Gamma = \Gamma\overset{\Delta}{H}E$
⇒ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
⇒ ΑΚ=ΗΕ (2)

Από (1) και (2) ⇒ ΖΔ=ΗΕ ⇒ Δ και Ε ισαπέχουν από την ΒΓ

7. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓ είναι τυχαίο τρίγωνο. Αν ΑΔ=ΑΒ, ΑΕ=ΑΓ και $A\Delta \perp AB, AE \perp A\Gamma$. Να δείξετε ότι ΓΔ=ΒΕ.



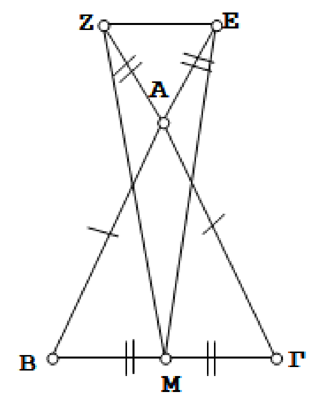
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ,

1. ΑΔ=ΑΒ (δεδ.) Π
2. $ΑΓ = ΑΕ$ (δεδ.) Π
3. $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ε$ $(Δ\hat{Α}Β + Β\hat{Α}Γ = Γ\hat{Α}Ε + Β\hat{Α}Γ)$ Γ
   Άθροισμα ίσων γωνιών

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$\Rightarrow Α\overset{\Delta}{Δ}Γ = Α\overset{\Delta}{Β}Ε$
$\Rightarrow$ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
$\Rightarrow$ ΓΔ=ΒΕ

8. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ=ΑΓ). Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ και ΑΖ=ΑΕ, όπου ΑΖ και ΑΕ είναι προεκτάσεις των ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΕ είναι ισοσκελές.



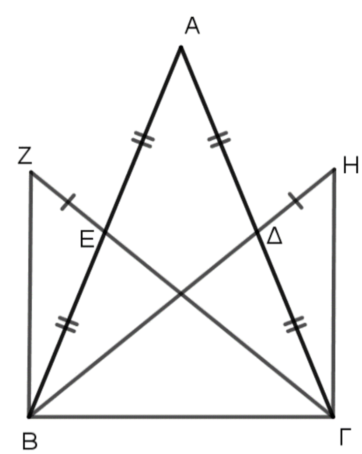
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΜΕ και ΓΜΖ,

1. ΒΕ=ΓΖ (ΑΒ+ΑΕ=ΑΓ+ΑΖ, αφού ΑΒ=ΑΓ και ΑΖ=ΑΕ) Π
   Άθροισμα ίσων τμημάτων
2. $\hat{Β} = \hat{Γ}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) Γ
3. $ΒΜ = ΜΓ$ (Μ μέσο ΒΓ) Π

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$\Rightarrow Β\overset{\Delta}{Μ}Ε = Γ\overset{\Delta}{Μ}Ζ$
$\Rightarrow$ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
$\Rightarrow$ ΜΕ=ΜΖ άρα το τρίγωνο ΜΖΕ είναι ισοσκελές.

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) να φέρετε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
   α) ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.
   β) στο ίδιο τρίγωνο να προεκτείνετε τις διαμέσους ΓΕ και ΒΔ κατά τμήματα ΕΖ, ΔΗ αντίστοιχα έτσι ώστε ΕΖ=ΔΗ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΒΗΓ είναι ίσα.



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ,

1. ΒΕ=ΓΔ (ΑΒ=ΑΓ και ΒΔ,ΓΕ διάμεσοι) Π
μισά ίσων πλευρών
2. $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) Γ

3. ΒΓ κοινή πλευρά Π

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$\Rightarrow B\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma = \Gamma\overset{\Delta}{E}B$
$\Rightarrow$ όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
$\Rightarrow$ ΒΔ=ΓΕ

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΒΗΓ,

1. ΒΗ=ΖΓ (ΒΔ+ΔΗ=ΓΕ+ΕΖ, αφού ΒΔ=ΓΕ και ΔΗ=ΕΖ) Π
Άθροισμα ίσων τμημάτων
2. $B\widehat{\Gamma}Z = \Gamma\widehat{B}H$ (ως αντίστοιχα στοιχεία των ίσων τριγώνων $B\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma = \Gamma\overset{\Delta}{E}B$) Γ
3. ΒΓ κοινή πλευρά Π

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$\Rightarrow B\overset{\Delta}{Z}\Gamma = B\overset{\Delta}{H}\Gamma$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ευθεία -Γραμμικά Συστήματα

1. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων $A(-1, 1)$ και $B(3,4)$.

$$\begin{matrix} \chi_1 & \psi_1 & & \chi_2 & \psi_2 \\ A(-1, & 1) & & B(3, & 4) \end{matrix}$$

$$(AB) = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$$

$$(AB) = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (4 - 1)^2}$$

$$(AB) = \sqrt{(3 + 1)^2 + 3^2}$$

$$(AB) = \sqrt{4^2 + 9}$$

$$(AB) = \sqrt{16 + 9}$$

$$(AB) = \sqrt{25} = 5 \text{ μ.μ}$$

2. Δίνονται τα σημεία $A(2,5)$ και $B(-2, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

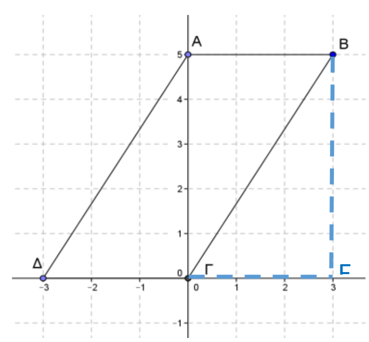
$$\begin{matrix} \chi_1 & \psi_1 & & \chi_2 & \psi_2 \\ A(2, & 5) & & B(-2, & 3) \end{matrix}$$

$$\chi_M = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Συντεταγμένες μέσου $M(0,4)$

3. Από την διπλανή γραφική παράσταση να βρείτε:
α) τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ.



$A(0,5)$ $B(3,5)$ $\Gamma(0,0)$ $\Delta(-3,0)$

β) την εξίσωση των ευθειών ΑΒ και ΒΓ.

<u>εξίσωση ευθείας ΑΒ :</u>

τα σημεία $A(0,5)$ και $B(3,5)$ έχουν <u>την ίδια τεταγμένη</u>, άρα η ευθεία ΑΒ είναι της μορφής $\psi=\beta \Rightarrow \psi=5$

<u>εξίσωση ευθείας ΒΓ :</u>

Η ευθεία περνά από το σημείο Γ(0,0) δηλ. από την αρχή των αξόνων άρα είναι της μορφής ψ=αχ, όπου α=λ

Από την γραφική παράσταση προκύπτει $\lambda_{ΒΓ} = \frac{ΒΕ}{ΓΕ} = \frac{5}{3}$

ψ=αχ ⇒ ψ=$\frac{5}{3}$χ

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $ε_1$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) είναι παράλληλη με την ευθεία $ε_2$: $ψ = 2χ - 1$ και τέμνει τον άξονα των ψ στο $(0,-8)$.

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

$ε_2$: $ψ = 2χ - 1$, $\lambda_2 = 2 \Longrightarrow \lambda_1 = 2$

ε_1 τέμνει τον άξονα τον ψ στο $(0,-8) \Longrightarrow β = -8$

Εξίσωση ευθείας ε_1

ψ=αχ+β ⟹ ψ=2χ−8

β) περνά από το σημείο Α(2,3) και είναι κάθετη με στην ευθεία $ε_2$: $4x + 2ψ = 3$.

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Longrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

$ε_2$: $4x + 2ψ = 3 \Leftrightarrow 2ψ = -4x + 3$

$\Leftrightarrow ψ = \frac{-4x}{2} + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow ψ = -2x + \frac{3}{2}$

άρα $\lambda_2 = -2$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (-2) = -1$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-1}{-2}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$

$ε_1$: $ψ = αχ + β \Longrightarrow ψ = \frac{1}{2}x + β$

Αντικαθιστούμε το σημείο $Α(2,3) \Longrightarrow 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + β \Longrightarrow 3 = 1 + β \Longrightarrow β = 3 - 1 \Longrightarrow β = 2$

Εξίσωση ευθείας $ε_1$: $ψ = \frac{1}{2}x + 2$

γ) περνά από το σημείο Β $(-5, 1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $ε_2$: $ψ = 2$

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε_2: $ψ = 2$, άρα και η ε_1 είναι της μορφής $ψ = β$.

Αφού περνά από το σημείο $(-5,1)$, τότε ε_1: $ψ = 1$

δ) περνά από το σημείο Γ $(4, -2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $ε_2$: $χ = -3$

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και ε_2: $χ = -3$, άρα η ε_1 είναι της μορφής $ψ = β$.

Αφού περνά από το σημείο $(4, -2)$, τότε ε_1: $ψ = -2$.

ε) περνά από το σημείο Δ $(3,-6)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία ε_2: $3\chi - y = 5$

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

ε_2: $3\chi - \psi = 5 \Leftrightarrow -\psi = -3x + 5$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{-3x}{-1} + \frac{5}{-1}$

$\Leftrightarrow \psi = 3x - 5$

άρα $\lambda_2 = 3$

$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$

ε_1: $\psi = \alpha\chi + \beta \Longrightarrow \psi = 3\chi + \beta$

Αντικαθιστούμε το σημείο $\Delta(3,-6) \Longrightarrow -6 = 3 \cdot 3 + \beta \Longrightarrow -6 = 9 + \beta \Longrightarrow \beta = -9 - 6 \Longrightarrow \beta = -15$

Εξίσωση ευθείας ε_1: $\psi = 3\chi - 15$

5. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές $A(1,0)$ $B(2,4)$ και $\Gamma(5,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

$$\lambda_{AB} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{4-0}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{-1-0}{5-1} = \frac{-1}{4}$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{-1-4}{5-2} = \frac{-5}{3}$$

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = 4 \cdot \frac{-1}{4} = -1$$

Συνθήκη Καθετότητας άρα, $AB \perp A\Gamma \Rightarrow \widehat{A} = 90°$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ.

ΑΔ ύψος $\Rightarrow$ $A\Delta \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$

$\Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} = -1 : \left(-\frac{5}{3}\right) = -1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

$\psi = \alpha\chi + \beta \Leftrightarrow \psi = \frac{3}{5}\chi + \beta$

Αντικαθιστούμε το σημείο $A(1,0) \Rightarrow 0 = \frac{3}{5} \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{5}$

Εξίσωση ύψους ΑΔ : $\psi = \frac{3}{5}\chi - \frac{3}{5}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΕ.

ΒΕ διάμεσος ⇒ Ε μέσο ΑΓ

$\chi_E = \frac{\chi_A+\chi_\Gamma}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $\psi_E = \frac{\psi_A+\psi_\Gamma}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow E(3, -\frac{1}{2})$

$\lambda_{EB} = \frac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1} = \frac{4-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2-3} = \frac{4+\frac{1}{2}}{-1} = \frac{\frac{9}{2}}{-1} = -\frac{9}{2}$

$\psi = \alpha\chi + \beta \Leftrightarrow \psi = -\frac{9}{2}\chi + \beta$

Αντικαθιστούμε το σημείο $B(2,4) \Rightarrow 4 = -\frac{9}{2}\cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta - 9 = 4 \Leftrightarrow \beta = 9 + 4 \Leftrightarrow \beta = 13$

Εξίσωση διαμέσου ΒΕ : $\psi = -\frac{9}{2}\chi + 13$

6. Να υπολογίσετε την τιμή του **α** ώστε οι ευθείες ε_1: $y = 2\chi - 5$ και ε_2: $y = (2\boldsymbol{\alpha} - 7)\chi + 9$ να είναι παράλληλες.

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ &\lambda_1 = 2 \\ &\lambda_2 = 2\alpha - 7 \end{aligned}\right\}$$

$2\alpha - 7 = 2$

$2\alpha = 7 + 2$

$2\alpha = 9$

$\alpha = \frac{9}{2}$

7. Να εξετάσετε στις πιο κάτω περιπτώσεις, αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες** , **ταυτίζονται** ή **τέμνονται**. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

α) ε_1 : $\psi = 2x + 5$
ε_2 : $\psi = 3\chi + 7$

$\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα οι ευθείες τέμνονται.

β) ε_1 : $18\chi + 6\psi = 8$
ε_2 : $\psi = -3\chi + 7$

ε_1: $18\chi + 6\psi = 8 \Leftrightarrow 6\psi = -18x + 8$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{-18x}{6} + \frac{8}{6}$

$\Leftrightarrow \psi = -3x + \frac{4}{3}$

άρα $\lambda_1 = -3$

$\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\beta_1 = \frac{4}{3}$, $\beta_2 = 7$
Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$
άρα οι ευθείες είναι παράλληλες

$\lambda_1 = \lambda_2$
$\beta_1 \neq \beta_2$ $\Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$
Συνθήκη παραλληλίας

γ) ε1: $\psi = 5\chi + 9$
ε2: $\psi = 4$

$\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = 0$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα οι ευθείες τέμνονται.

δ) ε1: $3\chi = 6\psi - 12$

ε_2: $2\psi - \chi = 4$

ε1: $3\chi = 6\psi - 12 \quad \Leftrightarrow 6\psi = 3\chi + 12$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{3x}{6} + \frac{12}{6}$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}x + 2$

άρα $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

ε2: $2\psi - \chi = 4 \quad \Leftrightarrow 2\psi = \chi + 4$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{\chi}{2} + \frac{4}{2}$

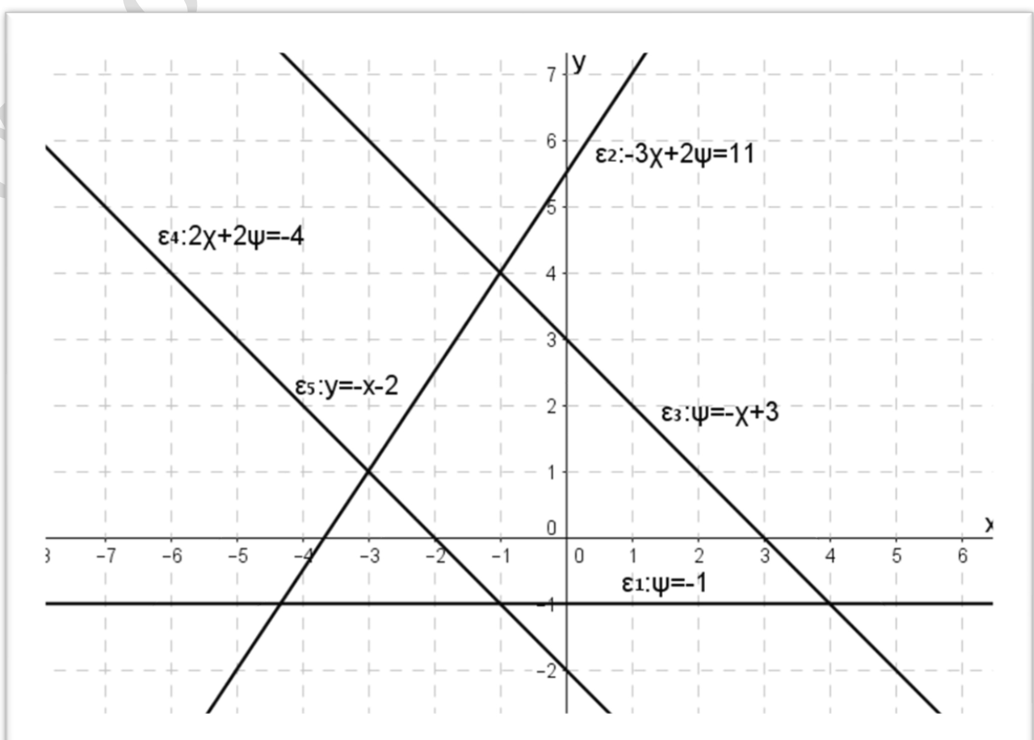
$\Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}x + 2$

άρα $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$
Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 = \beta_2$
άρα οι ευθείες ταυτίζονται.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = \lambda_2 \\ \beta_1 = \beta_2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$$

8. Χρησιμοποιώντας τις πιο κάνω γραφικές παραστάσεις, να εξετάσετε κατά πόσο τα ακόλουθα συστήματα έχουν μία λύση ή άπειρες λύσεις ή καμία λύση.
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



α) **ε3** : $\psi = -\chi + 3$ **ε2**: $-3\chi + 2\psi = 11$	β) **ε4**: $2\chi + 2\psi = -4$ **ε5**.$\psi = -\chi - 2$	γ) **ε3** : $\psi = -\chi + 3$ **ε5**: $\psi = -\chi - 2$	δ) **ε3**: $\psi = -\chi + 3$ **ε1**: $\psi = -1$
Μία λύση (τέμνονται)	Άπειρες λύσεις (ταυτίζονται)	Καμία λύση (παράλληλες)	Μία λύση (τέμνονται)

9. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $x - \cancel{y} = 9$
$x + \cancel{y} = 13$

$x + x = 13 + 9$
$\Leftrightarrow 2x = 22$
$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{22}{2}$
$\Leftrightarrow x = 11$

$x + y = 13$
$\Leftrightarrow 11 + y = 13$
$\Leftrightarrow y = 13 - 11$
$\Leftrightarrow y = 2$
Λύση συστήματος: $(\chi, y) = (11,2)$

β) $3x - y = 12 \Leftrightarrow y = 3x - 12$
$2x + 3y = 19$

$2x + 3y = 19$
$\Leftrightarrow 2x + 3(3x - 12) = 19$
$\Leftrightarrow 2x + 9x - 36 = 19$
$\Leftrightarrow 2x + 9x = 36 + 19$
$\Leftrightarrow 11x = 55$
$\Leftrightarrow \frac{11x}{11} = \frac{55}{11}$
$\Leftrightarrow x = 5$

$y = 3x - 12$
$\Leftrightarrow y = 3 \cdot 5 - 12$
$\Leftrightarrow y = 15 - 12$
$\Leftrightarrow y = 3$
Λύση συστήματος: $(x, y) = (5,3)$

$$\gamma)\ \begin{aligned} 2\alpha - 3\beta &= -6 \\ \alpha - 2\beta &= -5 \end{aligned} \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right. \Bigg\} \begin{aligned} \cancel{2}\alpha - 3\beta &= -6 \\ -\cancel{2}\alpha + 4\beta &= 10 \end{aligned}$$

$$-3\beta + 4\beta = -6 + 10$$

$$\Leftrightarrow \beta = 4$$

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta = -5 &\Leftrightarrow \alpha - 2 \cdot 4 = -5 \\ &\Leftrightarrow \alpha - 8 = -5 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 8 - 5 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 3 \end{aligned}$$

$\text{Λύση συστήματος: } (\alpha, \beta) = (3,4)$

$$\delta)\ \begin{aligned} 3\varphi + 5\omega &= 50 \\ 4\varphi + 3\omega &= 41 \end{aligned} \left| \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \right. \Bigg\} \begin{aligned} -\cancel{12}\varphi - 20\omega &= -200 \\ \cancel{12}\varphi + 9\omega &= 123 \end{aligned}$$

$$-20\omega + 9\omega = -200 + 123$$

$$\Leftrightarrow -11\omega = -77$$

$$\Leftrightarrow \frac{-11\omega}{-11} = \frac{-77}{-11}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 7$$

$$\begin{aligned} 3\varphi + 5\omega = 50 &\Leftrightarrow 3\varphi + 5 \cdot 7 = 50 \\ &\Leftrightarrow 3\varphi + 35 = 50 \\ &\Leftrightarrow 3\varphi = 50 - 35 \\ &\Leftrightarrow 3\varphi = 15 \\ &\Leftrightarrow \frac{3\varphi}{3} = \frac{15}{3} \\ &\Leftrightarrow \varphi = 5 \end{aligned}$$

$\text{Λύση συστήματος: } (\varphi, \omega) = (5,7)$

ε) $\left.\begin{aligned} &\frac{2x}{5}-\frac{y}{3}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{6x}{15}-\frac{5y}{15}=\frac{40}{15} \Leftrightarrow 6x-5y=40 \\ &x=2(y+1) \Leftrightarrow x=2y+2 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{aligned} & 6(2y+2)-5y=40 \\ \Leftrightarrow\ & 12y+12-5y=40 \\ \Leftrightarrow\ & 12y-5y=40-12 \\ \Leftrightarrow\ & 7y=28 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{7y}{7}=\frac{28}{7} \\ \Leftrightarrow\ & y=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x=2y+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=2\cdot 4+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=8+2 \\ \Leftrightarrow\ & x=10 \end{aligned}$$

Λύση συστήματος: $(x,y)=(10,4)$

10. Δίνεται η ευθεία $(\lambda+\mu)x+(2\mu-\lambda)y=3$. Να βρείτε τα λ και μ ώστε η ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(2,5)$ και $(-1,-7)$.

Αντικαθιστούμε το σημείο $(2,5)$ στην ευθεία $(\lambda+\mu)x+(2\mu-\lambda)y=3$

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)\cdot 2+(2\mu-\lambda)\cdot 5=3 &\Leftrightarrow 2\lambda+2\mu+10\mu-5\lambda=3 \\ &\Leftrightarrow -3\lambda+12\mu=3 \quad (1) \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε το σημείο $(-1,-7)$ στην ευθεία $(\lambda+\mu)x+(2\mu-\lambda)y=3$

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)\cdot(-1)+(2\mu-\lambda)\cdot(-7)=3 &\Leftrightarrow -\lambda-\mu-14\mu+7\lambda=3 \\ &\Leftrightarrow 6\lambda-15\mu=3 \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2),

$$\left.\begin{aligned} -3\lambda+12\mu=3 \\ 6\lambda-15\mu=3 \end{aligned}\right| \begin{aligned} 2 \\ 1 \end{aligned} \Bigg\} \quad \begin{aligned} -\cancel{6\lambda}+24\mu=6 \\ \cancel{6\lambda}-15\mu=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 24\mu-15\mu=6+3 \\ \Leftrightarrow\ & 9\mu=9 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{9\mu}{9}=\frac{9}{9} \\ \Leftrightarrow\ & \mu=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\lambda-15\mu=3 \Leftrightarrow 6\lambda-15\cdot 1=3 \Leftrightarrow 6\lambda-15=3 \Leftrightarrow 6\lambda=15+3 &\Leftrightarrow 6\lambda=18 \\ &\Leftrightarrow \frac{6\lambda}{6}=\frac{18}{6} \\ &\Leftrightarrow \lambda=3 \end{aligned}$$

11 . Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\alpha+\beta)x+2\alpha+\beta=4$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις τους αριθμούς 2 ή -3.

Αντικαθιστούμε όπου $\chi=2$ στην εξίσωση $x^2+(\alpha+\beta)x+2\alpha+\beta=4$

$$2^2+(\alpha+\beta)2+2\alpha+\beta=4 \Leftrightarrow 4+2\alpha+2\beta+2\alpha+\beta=4$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha+3\beta=0 \ \ (1)$$

Αντικαθιστούμε όπου $\chi=-3$ στην εξίσωση $x^2+(\alpha+\beta)x+2\alpha+\beta=4$

$$(-3)^2+(\alpha+\beta)\cdot(-3)+2\alpha+\beta=4 \Leftrightarrow 9-3\alpha-3\beta+2\alpha+\beta=4$$
$$\Leftrightarrow -\alpha-2\beta=4-9$$
$$\Leftrightarrow \alpha+2\beta=5 \ \ (2)$$

Από (1) και (2),

$$\left.\begin{array}{l|l} 4\alpha+3\beta=0 & 1 \\ \alpha+2\beta=5 & -4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cancel{4\alpha}+3\beta=0 \\ \underline{-\cancel{4\alpha}-8\beta=-20} \\ 3\beta-8\beta=-20 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \ -5\beta=-20$$
$$\Leftrightarrow \ \frac{-5\beta}{-5}=\frac{-20}{-5}$$
$$\Leftrightarrow \ \beta=4$$

$$\alpha+2\beta=5 \ \Leftrightarrow \alpha+2\cdot4=5$$
$$\Leftrightarrow \alpha+8=5$$
$$\Leftrightarrow \alpha=5-8$$
$$\Leftrightarrow \alpha=-3$$

Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με την χρήση συστήματος.

12. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες, να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

	Αριθμός σκηνών	Αριθμός ατόμων στις σκηνές
Σκηνές των 4	χ	4χ
Σκηνές των 6	ψ	6ψ

$$\chi + \psi = 50 \Leftrightarrow \chi = 50 - \psi$$

$$\begin{aligned} 4\chi + 6\psi = 260 &\Leftrightarrow 4(50 - \psi) + 6\psi = 260 \\ &\Leftrightarrow 200 - 4\psi + 6\psi = 260 \\ &\Leftrightarrow 2\psi = 260 - 200 \\ &\Leftrightarrow 2\psi = 60 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\psi}{2} = \frac{60}{2} \\ &\Leftrightarrow \psi = 15 \end{aligned}$$

$$\chi = 50 - \psi \Leftrightarrow \chi = 50 - 15 = 35$$

<u>Απάντηση:</u> 35 σκηνές των 4 ατόμων και 15 σκηνές των 6 ατόμων.

13. Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών, δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ .Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα του ενός ευρώ και πόσα των δύο ευρώ δέχεται ο κερματοδέκτης.

	Αριθμός κερμάτων	Αξία κερμάτων
Κέρμα €1	χ	1χ
Κέρμα €2	ψ	2ψ

$$\chi + \psi = 80 \Leftrightarrow \chi = 80 - \psi$$

$$\begin{aligned} \chi + 2\psi = 95 &\Leftrightarrow 80 - \psi + 2\psi = 95 \\ &\Leftrightarrow \psi = 95 - 80 \\ &\Leftrightarrow \psi = 15 \end{aligned}$$

$$\chi = 80 - \psi \Leftrightarrow \chi = 80 - 15 = 65$$

<u>Απάντηση:</u> 65 κέρματα του €1 και 15 κέρματα των €2.

14 . Στη χορωδία ενός σχολείου συμμετέχουν 52 μαθητές και μαθήτριες. Αν οι μαθήτριες είναι 10 περισσότερες από το διπλάσιο των μαθητών, να βρείτε πόσοι μαθητές και πόσες μαθήτριες συμμετέχουν στη χορωδία του σχολείου.

Αριθμός μαθητών: χ

Αριθμός μαθητριών: ψ

52 μαθητές και μαθήτριες: $\chi + \psi = 52$

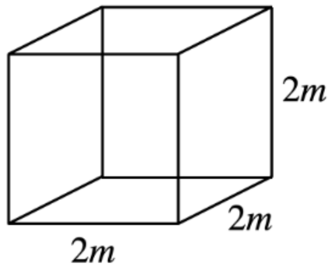
οι μαθήτριες είναι 10 περισσότερες από το διπλάσιο των μαθητών: $\psi = 2\chi + 10$

$$\begin{aligned}
&\psi = 2\chi + 10 \\
&\chi + \psi = 52 \Leftrightarrow \chi + (2\chi + 10) = 52 \\
&\Leftrightarrow 3\chi + 10 = 52 \\
&\Leftrightarrow 3\chi = 52 - 10 \\
&\Leftrightarrow 3\chi = 42 \\
&\Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} = \frac{42}{3} \\
&\Leftrightarrow \chi = 14 \\
&\psi = 2\chi + 10 \Leftrightarrow \psi = 2 \cdot 14 + 10 \\
&\Leftrightarrow \psi = 28 + 10 \\
&\Leftrightarrow \psi = 38
\end{aligned}$$

<u>Απάντηση:</u> Στη χορωδία του σχολείου συμμετέχουν 14 μαθητές και 38 μαθήτριες.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Στερεομετρία

(1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή 2m.



$$\begin{aligned} E_{ολ} &= Π_β \cdot υ + 2E_β \\ &= 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 \\ &= 16 + 8 = 24m^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V &= E_β \cdot υ \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 8m^3 \end{aligned}$$

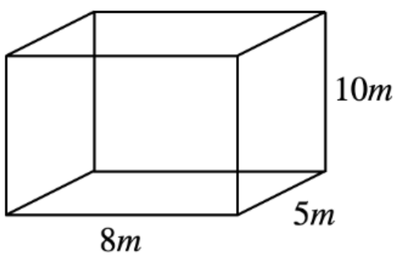
ή

$$\begin{aligned} E_{ολ} &= 6α^2 \\ &= 6 \cdot 2^2 \\ &= 24m^2 \end{aligned}$$

Και

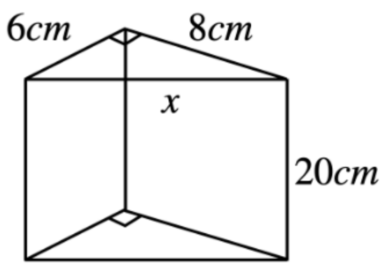
$$\begin{aligned} V &= a^3 \\ &= 2^3 \\ &= 8m^3 \end{aligned}$$

(2) Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 5 m, 8 m και 10 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.



$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_π + 2E_β \\ &= Π_β \cdot υ + 2 \cdot 5 \cdot 8 \\ &= 2(8+5) \cdot 10 + 80 \\ & 260 + 80 \\ & 340m^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V &= E_β \cdot υ \\ &= 8 \cdot 5 \cdot 10 \\ & 400m^3 \end{aligned}$$

(3) Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm . Αν το ύψος του πρίσματος είναι 20 cm να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.

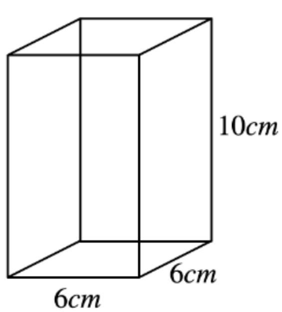


$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_π + 2E_β \\ &= Π_β \cdot υ + 2\frac{6 \cdot 8}{2} \\ &= (6 + 8 + 10) \cdot 20 + 48 \\ &= 480 + 48 \\ &= 528cm^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V &= E_β \cdot υ \\ &= \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 20 \\ &= 480cm^3 \end{aligned}$$

Π.Θ. στην βάση του τριγώνου:

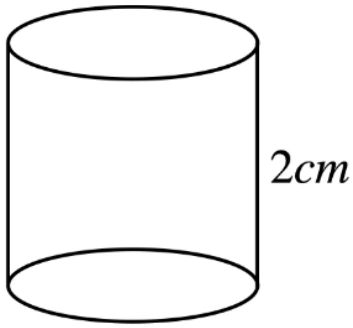
$$\begin{aligned} & x^2 = 8^2 + 6^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 64 + 36 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 100 \\ \Leftrightarrow\ & x = 10cm \end{aligned}$$

(4) Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 6 cm. Το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και τον όγκο του.



$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_π + 2E_β \\ &= Π_β \cdot υ + 2E_β \\ &= 4 \cdot 6 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 6 \\ &= 240 + 72 \\ & 312cm^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V &= E_β \cdot υ \\ &= 6^2 \cdot 10 \\ &= 360cm^3 \end{aligned}$$

(5) Κύλινδρος έχει όγκο 50π cm³ και ύψος 2 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

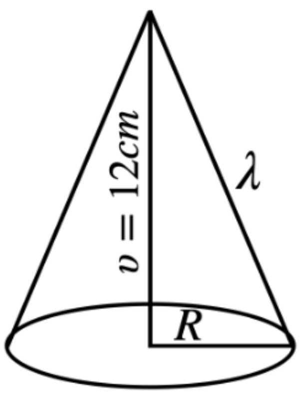


$$V = 50\pi cm^3$$

$$\begin{aligned} V &= E_\beta \cdot \upsilon \\ \Leftrightarrow\ 50\pi &= \pi R^2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow R^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow R &= 5cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{o\lambda} &= E_\kappa + 2E_\beta \\ &= \Pi_\beta \cdot \upsilon + 2E_\beta \\ &= 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2 \\ &= 20\pi + 50\pi \\ &= 70\pi cm^2 \end{aligned}$$

(6) Το μήκος της βάσης κώνου είναι 10π cm και το ύψος του 12 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδό της κυρτής του επιφάνειας.



$$\Pi_\beta = 10\pi cm$$

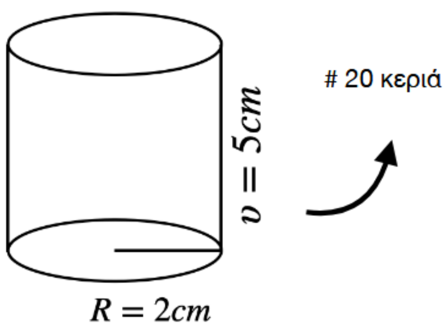
$$\begin{aligned} \Pi_\beta &= 2\pi R \\ \Leftrightarrow 10\pi &= 2\pi R \\ \Leftrightarrow R &= 5cm \end{aligned}$$

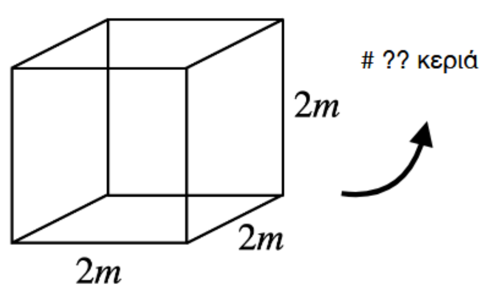
Π.Θ. στο τρίγωνο:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \upsilon^2 + R^2 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 12^2 + 5^2 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 144 + 25 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 169 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 13cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\kappa &= \pi R \lambda \\ &= \pi \cdot 5 \cdot 13 \\ &= 65\pi cm^2 \end{aligned}$$

(7) Η Γεωργία έχει 20 κυλινδρικά κεριά ύψους 5 cm με ακτίνα βάσης 2 cm. Πρόκειται να τα λιώσει για να κατασκευάσει κεριά σχήματος κύβου ακμής 2 cm. Πόσα κεριά που θα έχουν σχήμα κύβου θα κατασκευάσει, αν δεν έχει απώλεια πρώτης ύλης ;





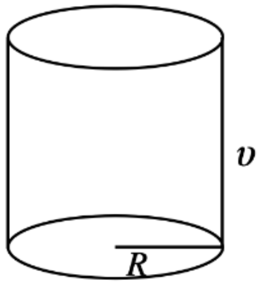
$$\begin{aligned} V_{\kappa\upsilon\lambda.} &= E_\beta \cdot \upsilon \\ &= \pi R^2 \upsilon \\ &= \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \\ &= 20\pi cm^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\kappa\varepsilon\rho\iota o\upsilon} &= 20\pi \cdot 20 \\ &= 400\pi cm^3 \\ &= 1256 cm^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\kappa\upsilon\beta.} &= 2^3 \\ &= 8cm^3 \end{aligned}$$

Πλήθος κυβικών κεριών $= \dfrac{V_{\kappa\varepsilon\rho\iota o\upsilon}}{V_{\kappa\upsilon\beta.}} = \dfrac{1256}{8} = 157$ κεριά.

(8) Κύλινδρος έχει εμβαδό βάσης 16π cm² και εμβαδό ολικής επιφάνειας 80πcm². Να υπολογίσετε τον όγκο του.



$$E_\beta = 16\pi cm^2$$

$$\begin{aligned} E_\beta &= \pi R^2 \\ \Leftrightarrow 16\pi &= \pi R^2 \\ \Leftrightarrow R &= 4cm \end{aligned}$$

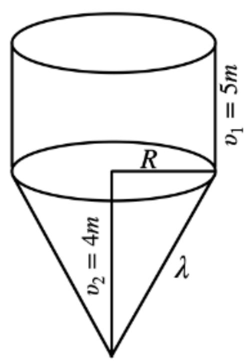
$$\begin{aligned} E_{o\lambda} &= E_\kappa + 2E_\beta \\ \Leftrightarrow 80\pi &= \Pi_\beta \cdot \upsilon + 2 \cdot 16\pi \\ \Leftrightarrow 80\pi &= 2\pi R\upsilon + 32\pi \\ \Leftrightarrow 48\pi &= 2\pi 4\upsilon \\ \Leftrightarrow \upsilon &= \frac{48}{8} \\ \Leftrightarrow \upsilon &= 6cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\kappa\upsilon\lambda.} &= E_\beta \cdot \upsilon \\ &= \pi R^2 \upsilon \\ &= \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \\ &= \pi \cdot 16 \cdot 6 \\ &= 96\pi cm^3 \end{aligned}$$

(9) Το διπλανό στερεό είναι αποθήκη σιτηρών, ανοικτή από πάνω και φτιαγμένη από λαμαρίνα κόστους 20€ το m². Το ύψος του κυλίνδρου είναι 5 m και το ύψος του κώνου είναι 4 m.

α) Αν ο όγκος του στερεού είναι 57π m³, να βρείτε το κόστος κατασκευής του.

β) Αν το στερεό είναι γεμάτο με σιτάρι και θα το μεταφέρουμε με φορτηγό σε άλλη αποθήκη, να υπολογίσετε πόσες διαδρομές θα κάνει το φορτηγό, του οποίου η καρότσα είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 5m, 3m και1,8m.



20€ / m^2

(α) $V = 57\pi m^3$ κόστος κατασκευής=?

(β) Πλήθος διαδρομών = ?

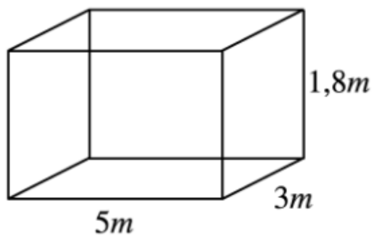
$$\begin{aligned} E_{o\lambda} &= E_{\kappa.\kappa\upsilon\lambda} + E_{\kappa.\kappa\omega\nu} \\ &= \Pi_\beta \cdot \upsilon_1 + \pi R\lambda \\ &= 2\pi R5 + \pi R\lambda \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 30\pi + 15\pi \\ &= 45\pi m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{o\lambda} &= V_{\kappa\upsilon\lambda} + V_{\kappa\omega\nu} \\ \Leftrightarrow 57\pi &= E_\beta \cdot \upsilon_1 + \frac{1}{3} E_\beta \cdot \upsilon_2 \\ \Leftrightarrow 57\pi &= \pi R^2 \cdot 5 + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow 57 &= 5R^2 + \frac{4}{3}R^2 \end{aligned}$$

Π.Θ. στο τρίγωνο:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= R^2 + \upsilon_2^2 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 9 + 16 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 5m \end{aligned}$$

$$K = E_{ολ} \cdot \frac{20 \ \ ευρω}{m^2}$$
$$= 45\pi \ \ m^2 \ \ \frac{20 \ \ ευρω}{m^2}$$
$$= 900\pi \ \ ευρω$$



$$\Leftrightarrow 171 = 15R^2 + 4R^2$$
$$\Leftrightarrow 19R^2 = 171$$
$$\Leftrightarrow R^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow R = 3m$$

Διαδρομές $= \dfrac{V}{V_{παρ.}} = \dfrac{57\pi m^3}{5 \cdot 3 \cdot 1{,}8m^3} = \dfrac{178.98m^3}{27m^3} = 6.63$

Άρα θα χρειαστεί να κάνει 7 διαδρομές.

ΕΝΟΤΗΤΑ 10: Παραλληλόγραμμα και τραπέζια

1. Να αντιστοιχίσετε τις προτάσεις της στήλης Α με της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1) Τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές παράλληλες και τις διαγώνιες του ίσες	i) Τετράγωνο
2) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται	ii) Ορθογώνιο
3) Οι διαγώνιοι διχοτομούνται, είναι ίσες και κάθετες	iii) Ρόμβος
4) Τετράπλευρο με τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες	iv) Τραπέζιο
	v) Παραλληλόγραμμο

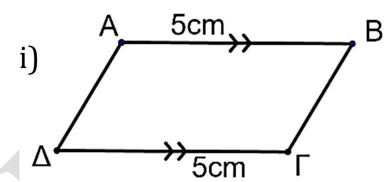
Λύση: 1– ii, 2– v, 3– iv, 4– iii

2. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα **Σ**, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα **Λ**, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

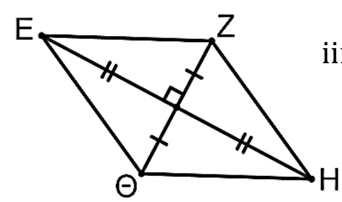
1) Ορθογώνιο είναι κάθε παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία.	Σ	Λ
2) Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε αυτό είναι ορθογώνιο.	Σ	Λ
3) Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του.	Σ	Λ
4) Ένας ρόμβος είναι και τετράγωνο.	Σ	Λ

3. Να γράψετε το είδος των πιο κάτω τετράπλευρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

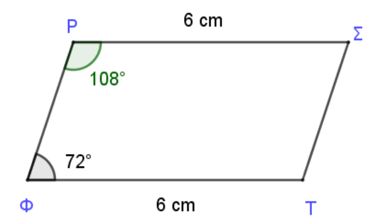
i)



ii)



iii)



$\hat{P} + \hat{\Phi} = 108^o + 72^o = 180^o$

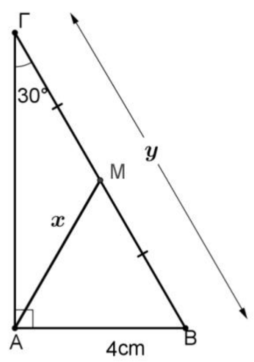
$AB \parallel = \Delta\Gamma$. Άρα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο(δυο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες)

Οι διαγώνιοι διχοτομούνται και είναι κάθετες, άρα ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

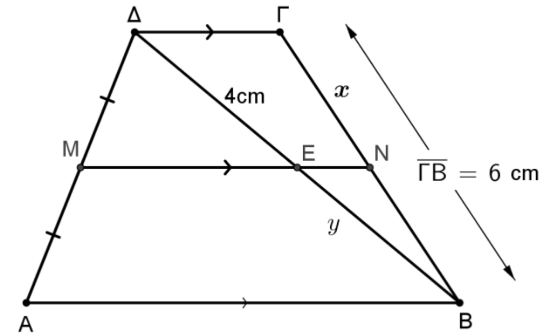
Αφού $\hat{P}$, $\hat{\Phi}$ παραπληρωματικές και είναι σε θέση εντός επί τα αυτά τότε $P\Sigma \parallel \Phi T$. Επίσης $P\Sigma = \Phi T$. Άρα το ΡΣΤΦ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

4. Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τις τιμές των x και y σε κάθε περίπτωση και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α)



β)



α)

$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = 90^o \\ \hat{\Gamma} = 30^o\end{array}\right\}$ $AB = \frac{B\Gamma}{2}$

$B\Gamma = 2 \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8$cm

$\hat{A} = 90^o$

AM διάμεσος, άρα AM$=\frac{B\Gamma}{2} = 4$cm

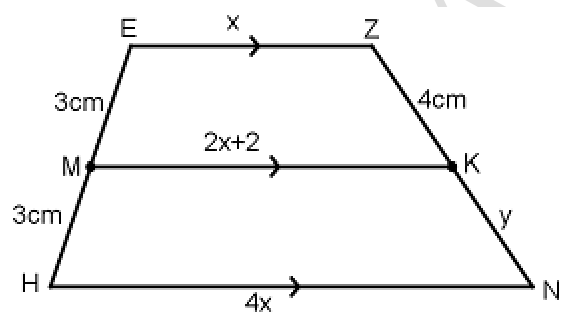
β)

ΔΓ || MN || AB ΔE = EB και ΓN=NB

ΔM = MA y = 4cm

x$=\frac{6}{2}$=3cm

γ)



EZ || MK || HN ZK = KN

EM = MH y = 4cm

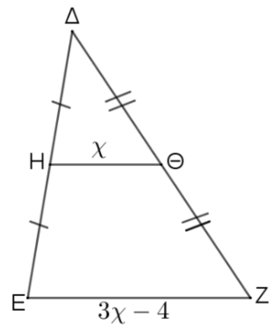
MK διάμεσος τραπεζίου ⇒MK $= \frac{EZ+HN}{2}$

$$2x + 2 = \frac{x+4x}{2}$$

$$4x + 4 = x + 4x$$

$$x = 4cm$$

δ)

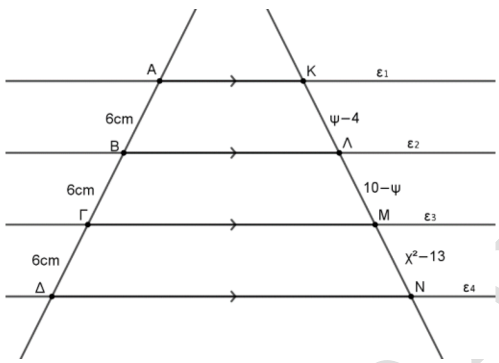


Η μέσον ΔΕ

Θ μέσον ΔΖ

$H\Theta = \frac{EZ}{2} \Rightarrow x = \frac{3x-4}{2} \Rightarrow 2x = 3x - 4 \Rightarrow x = 4$

ε)



ΑΚ || ΒΛ || ΓΜ

ΑΒ = ΒΓ

ΚΛ = ΛΜ

ψ − 4 = 10 − ψ

⇔ ψ = 7

ΒΛ || ΓΜ || ΔΝ

ΒΓ = ΓΔ

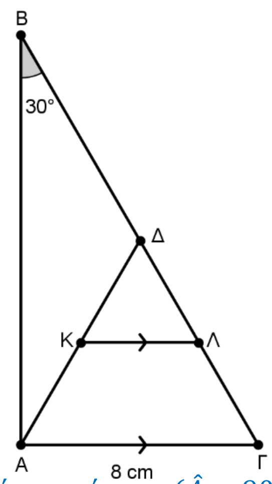
ΛΜ = ΜΝ

$10 - 7 = x^2 - 13$

⇔ $x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \Rightarrow x = 4 \ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}$

5. Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ και το σημείο Κ το μέσο της ΑΔ. Αν ΚΛ // ΑΓ , $\hat{B} = 30°$ και ΑΓ = 8 cm .Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ, ΑΔ και ΚΛ. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



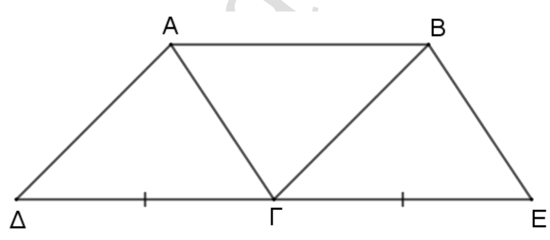
$$\left.\begin{array}{r} AB\Gamma \text{ ορθογώνιο τρίγωνο } (\hat{A} = 90^0) \\ \hat{B} = 30^0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow 8 = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow B\Gamma = 16\ cm$$

$$\left.\begin{array}{r} AB\Gamma \text{ ορθογώνιο τρίγωνο } (\hat{A} = 90^0) \\ A\Delta \text{ διάμεσος αφού } \Delta \text{ μέσο } B\Gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{16}{2} \Leftrightarrow A\Delta = 8\ cm$$

$$\left.\begin{array}{r} K \text{ μέσο } A\Delta \\ K\Lambda // A\Gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Lambda \text{ μέσο } \Delta\Gamma$$

$$\left.\begin{array}{r} K \text{ μέσο } A\Delta \\ \Lambda \text{ μέσο } \Delta\Gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow K\Lambda =// \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = \frac{8}{2} \Leftrightarrow K\Lambda = 4cm$$

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προεκτείνετε τη ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΔΓ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΒΕΓ παραλληλόγραμμο.

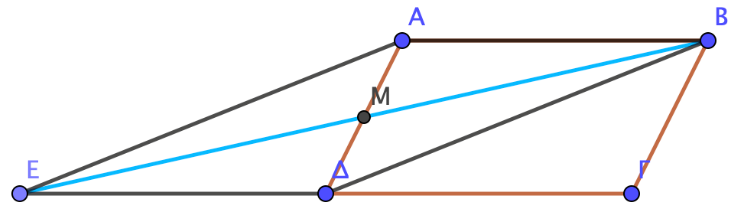


$$\left.\begin{array}{r} AB // \Delta\Gamma \text{ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο)} \\ \Gamma E \text{ προέκταση της } \Delta\Gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow AB // \Gamma E \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} AB = \Delta\Gamma \text{ (πλευρές παραλληλογράμμου)} \\ \Delta\Gamma = \Gamma E \text{ (δεδεδομένα)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow AB = \Gamma E \quad (2)$$

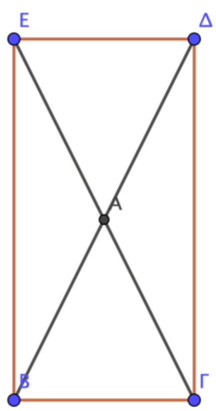
Από (1) και (2) $\Leftrightarrow AB //= \Gamma E \Leftrightarrow$ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

7. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Μ είναι το μέσο της ΑΔ. Φέρουμε την ΒΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΒΜ=ΜΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.



$$\left.\begin{array}{l} AM = MΔ\ (M\ \text{μέσο}\ AΔ) \\ BM = ME\ \ (\text{δεδομένο}) \end{array}\right\} \Longrightarrow ABΔE\ \text{παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται}$$

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΑΔ=ΑΒ και την ΑΓ κατά τμήμα ΑΕ=ΑΓ. Να δείξετε ότι το ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο.



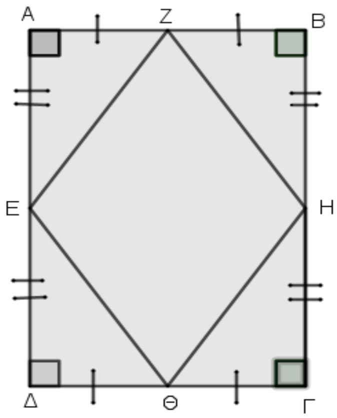
$$\left.\begin{array}{l} AΔ = AB\ (\text{δεδομένο}) \\ AE = AΓ\ (\text{δεδομένο}) \end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow BΓΔE\ \text{παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται}$$

$$\left.\begin{array}{l} AΔ = AB(\text{δεδομένο}) \\ AE = AΓ(\text{δεδομένο}) \\ AB = AΓ(\text{δεδομένο}) \end{array}\right\} \Longrightarrow AΔ = AE = AB = AΓ \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} EΓ = EA + AΓ \\ BΔ = BA + AΔ \end{array}\right\} \ (2)$$

Από (1) και (2) $\Longrightarrow$ $EΓ = BΔ$ $\Longrightarrow$
$BΓΔE$ *ορθογώνιο γιατί είναι # και οι διαγώνιοι του είναι ίσες*

9. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΕΑΖ, ΕΔΘ, ΗΓΘ, ΗΒΖ:

ΑΕ=ΕΔ=ΗΓ=ΗΒ(μισά ίσων πλευρών)

$\hat{A} = \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} = \hat{B} = 90^o$(γωνιές ορθογωνίου)

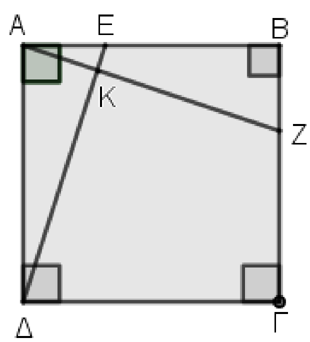
ΑΖ=ΔΘ=ΓΘ=ΒΖ(μισά ίσων πλευρών)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{\mathrm{EAZ}} = \overset{\triangle}{\mathrm{E\Delta\Theta}} = \overset{\triangle}{\mathrm{H\Gamma\Theta}} = \overset{\triangle}{\mathrm{HBZ}}(\Pi - \Gamma - \Pi)$

$\Rightarrow EZ = E\Theta = H\Theta = ZH(Αντίστοιχα\ Στοιχεία\ Ίσων\ Τριγώνων)$

$\Rightarrow$ ΕΖΗΘ ρόμβος γιατί όλες οι πλευρές του είναι ίσες

10. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ, παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα , ώστε ΑΕ=ΒΖ. Να αποδείξετε ότ : α) $AZ = \Delta E$ και β) $AZ \perp \Delta E$



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΑΖ :

ΑΔ=ΑΒ(πλευρές τετραγώνου)

$\hat{A} = \hat{B} = 90^o$(γωνιές τετραγώνου)

ΑΕ=ΒΖ(δεδομένο)

$\Rightarrow \overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta E}} = \overset{\triangle}{\mathrm{BAZ}}(\Pi - \Gamma - \Pi)$

$\Rightarrow AZ = \Delta E(Αντίστοιχα\ Στοιχεία\ Ίσων\ Τριγώνων)$

β) Από α) ερώτημα

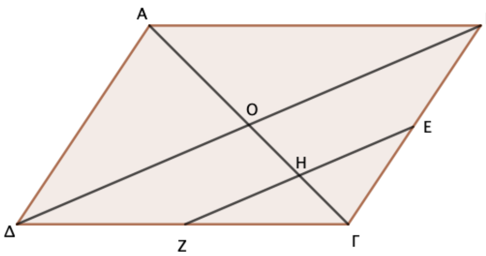
$A\hat{Z}B = A\hat{E}\Delta(Αντίστοιχα\ Στοιχεία\ Ίσων\ Τριγώνων)^*$

Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{AEK}}$:

$E\hat{A}K + A\hat{E}K = B\hat{A}Z + A\hat{E}\Delta = B\hat{A}Z + A\hat{Z}B \ast= 90^o$(Άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$$\Rightarrow A\hat{K}E = 90^o \Rightarrow \Delta E\ \perp AZ$$

11. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η ,να δείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.



Κατασκευάζω την διαγώνιο ΒΔ.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ζ μέσο ΔΓ}\\ \text{Ε μέσο ΒΓ}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{ZE} \parallel = \frac{\Delta\mathrm{B}}{2} \Rightarrow \mathrm{HE} \parallel \mathrm{BO}$$

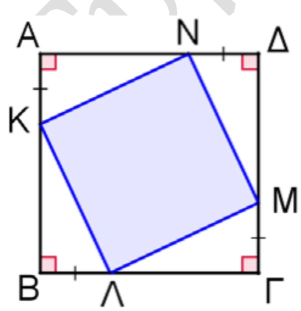
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{HE} \parallel \mathrm{BO}\\ \text{Ε μέσο ΒΓ}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Η μέσο ΟΓ}$$

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο ⟹ ΑΟ= ΟΓ (διαγώνιοι διχοτομούνται)

$$\Longrightarrow \mathrm{O\Gamma} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$$

Η μέσο ΟΓ $\Longrightarrow \Gamma\mathrm{H} = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}}{2} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{4}$

12. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ,Λ,Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ. Να δείξετε ότι ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.



Συγκρίνουμε τα τέσσερα τρίγωνα ΑΚΝ, ΒΛΚ, ΓΛΜ και ΔΜΝ :

- $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$ *(Δεδομένο)* (Π)
- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^o$ *(ΑΒΓΔ τετράγωνο)* (O)
- $AN = BK = \Gamma\Lambda = \Delta M$ *(Διαφορές ίσων τμημάτων)* (Π)

Αφού,

$AN = \boldsymbol{A\Delta} - \boldsymbol{N\Delta}$
$BK = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AK}$
$\Gamma\Lambda = \boldsymbol{B\Gamma} - \boldsymbol{B\Lambda}$
$\Delta M = \boldsymbol{\Delta\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma M}$

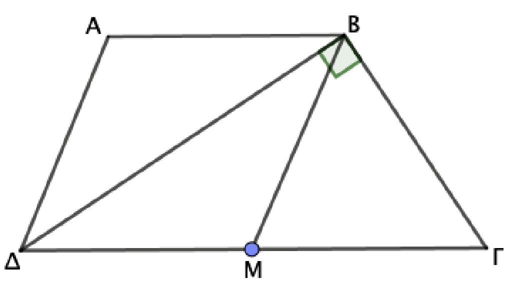
Ίσες πλευρές τετραγώνου ΑΒΓΔ | *Δεδομένα*

Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($\Pi - \Pi - O$).
Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε ότι τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ένα προς ένα ίσα. Άρα $KN = K\Lambda = \Lambda M = MN$, δηλαδή το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

Ισχύει: $A\widehat{N}K = \Delta\widehat{M}N = x$ *και* $A\widehat{K}N = \Delta\widehat{N}M = 90^\circ - x$ *(γωνίες ορθογωνίων τριγώνων).*
$A\widehat{N}K + K\widehat{N}M + \Delta\widehat{N}M = 180^\circ$ *(ευθεία γωνία)*
$K\widehat{N}M = 180^\circ - A\widehat{N}K - \Delta\widehat{N}M = 180^\circ - x - 90^\circ + x = 90^\circ$

Άρα, το $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος και έχει μία ορθή γωνία (ορθογώνιο). Άρα, είναι τετράγωνο.

13. Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) ισχύει η σχέση ότι ΔΓ=2ΑΒ. Αν Μ το μέσο της ΔΓ και $B\Delta \perp B\Gamma$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΜΔ είναι ρόμβος.



ΑΒΓΔ τραπέζιο $\Longrightarrow$ ΑΒ ∥ ΔΓ $\Rightarrow$ ΑΒ ∥ ΔΜ.

ΔΓ=2ΑΒ
Μ μέσο ΔΓ
$\Longrightarrow AB = \Delta M$

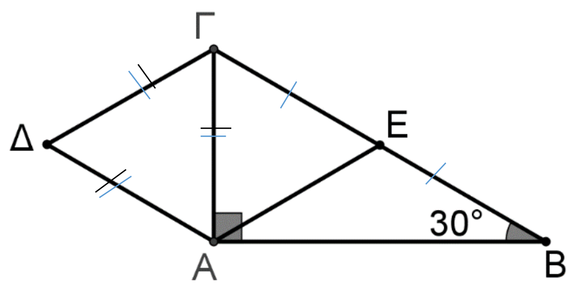
$\Longrightarrow$ ΑΒΜΔ παραλληλόγραμμο
γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες

ΔΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο
$B = 90^0$ $(\Delta B \perp B\Gamma)$
ΒΜ διάμεσος

$\Longrightarrow BM = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = \Delta M$

$\Longrightarrow$ ΑΒΜΔ ρόμβος
Γιατί είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες

14. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΓ με $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = 30°$, ΑΕ διάμεσος του τριγώνου και ΑΔΓ ισόπλευρο τρίγωνο. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ρόμβος.



ΑΕ διάμεσος $\Rightarrow$ ΓΕ=ΕΒ

<u>Στο τρίγωνο ΑΒΓ</u>

Α=90˚
ΑΕ διάμεσος
} ΑΕ=$\frac{ΒΓ}{2}$ =ΓΕ

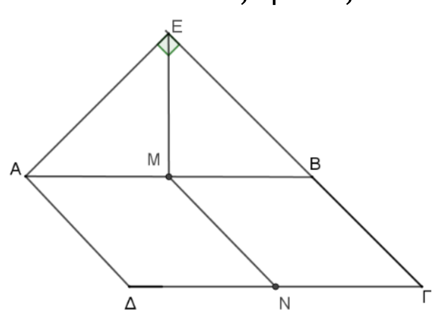
<u>Θεώρημα 30˚</u>

Α=90˚
Β=30˚
} ΑΓ=$\frac{ΒΓ}{2}$=ΓΕ

} ΑΕ=ΑΓ και ΑΓ=ΑΔ=ΔΓ (ΑΔΓ ισόπλευρο τρίγωνο)

} ΑΕ=ΕΓ=ΓΔ=ΑΔ όλες οι πλευρές ίσες ,άρα ΑΔΓΕ ρόμβος

15. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=2ΒΓ και η γωνία Β να είναι αμβλεία. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην προέκταση της ΓΒ και έστω Μ,Ν τα μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΜΒΓΝ είναι ρόμβος
β) το τετράπλευρο ΜΕΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο



α) AB =|| ΓΔ (ΑΒΓΔ #) άρα $\frac{AB}{2}$=||$\frac{ΓΔ}{2}$ ⇒ ΜΒ= || ΝΓ άρα ΜΒΓΝ #
AB=2ΒΓ ⇒ $\frac{AB}{2}$=$\frac{2ΒΓ}{2}$ ⇒ ΜΒ=ΒΓ

ΜΒΓΝ ρόμβος (είναι# και έχει2 διαδοχικές πλευρές ίσες)

β) Στο τρίγωνο ΑΕΒ

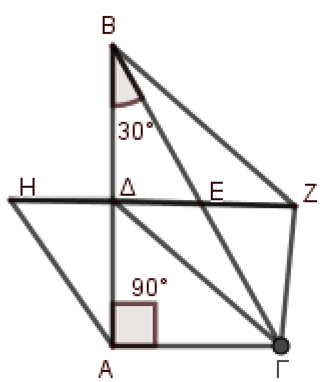
Ε=90˚ , ΕΜ διάμεσος } ΕΜ=$\frac{AB}{2}$=ΜΒ

ΜΒ=ΓΝ(αποδείχθηκε στο α) ⇒ $EM = NΓ$ (1)

ΜΝ || ΒΓ (γιατί ΜΒΓΝ#) (2) ⇒ από (1) και (2) ΜΕΓΝ ισοσκελές τραπέζιο

16. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{o}\right)$ με $\hat{B}=30^{o}$ τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήματα ΕΖ και ΔΗ, έτσι ώστε ΔΗ = ΔΕ = ΕΖ Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο



ΔΕ=ΕΖ(δεδομένο)
ΒΕ=ΕΓ(Ε μέσον ΒΓ)
Άρα ΒΖΓΔ παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοι διχοτομούνται)

β) το τετράπλευρο ΑΓΕΗ είναι ρόμβος.

$\left.\begin{array}{l} Δ\ μέσον\ της\ AB \\ E\ μέσον\ της\ BΓ \end{array}\right\}$ ΔΕ $|| = \frac{AΓ}{2} \Rightarrow 2ΔE|| = AΓ \Rightarrow HΔ + ΔE = AΓ(HΔ = ΔE)$

$\Rightarrow$ ΗΕ $|| = AΓ$

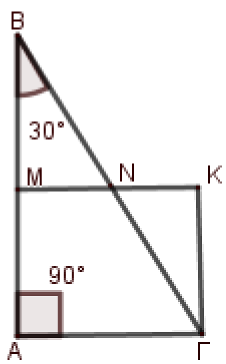
Άρα ΗΕΓΑ παραλληλόγραμμο(δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες) (1)

$\left.\begin{matrix}\widehat{A}=90^\circ \\ \widehat{B}=30^\circ\end{matrix}\right\}$ $ΑΓ=\frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow ΑΓ=ΓΕ \quad (2)$

Από (1) και (2) ΗΕΓΑ ρόμβος(παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες)

17. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^\circ, \widehat{B}=30^\circ$ και ΒΓ = 32cm. Αν Μ, Ν μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΝΓΑ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.



$\left.\begin{matrix}M \text{ μέσον της } AB \\ N \text{ μέσον της } ΒΓ\end{matrix}\right\} MN \parallel = \frac{ΑΓ}{2} \Rightarrow ΜΝΓΑ \text{ τραπέζιο και}$

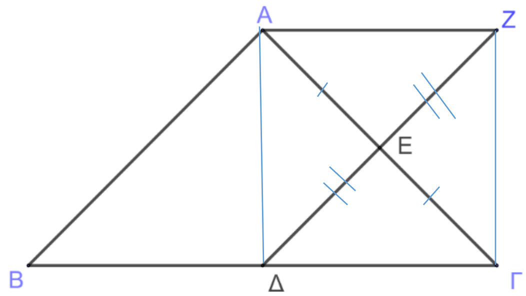
$\widehat{A}=90^\circ$, άρα ΜΝΓΑ ορθογώνιο τραπέζιο

β) Να προεκτείνετε την πλευρά ΜΝ κατά τμήμα ΝΚ έτσι ώστε ΜΝ=ΝΚ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΚΓΑ είναι ορθογώνιο.

Από α) ερώτημα $MN \parallel = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow 2MN \parallel = ΑΓ \Rightarrow MN+NK \parallel = ΑΓ (MN=NK)$

Άρα $MK \parallel = ΑΓ \Rightarrow$ ΜΚΓΑ παραλληλόγραμμο και $\widehat{A}=90^\circ$, άρα ΜΚΓΑ είναι ορθογώνιο

18. Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ=ΑΓ. Το Δ είναι το μέσο της ΒΓ, το Ε είναι το μέσο της ΑΓ και ΔΕ=ΕΖ.



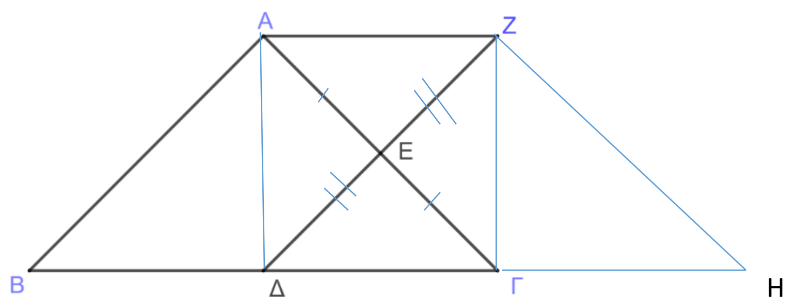
α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

$$\left.\begin{aligned} AE &= E\Gamma \ (E \text{ μέσον}) \\ \Delta E &= EZ \ (\text{δεδομένο}) \end{aligned}\right\} A Z \Gamma \Delta \text{ παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται}(1)$$

ΑΔ διάμεσος στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, άρα ΑΔ είναι και ύψος. Άρα $\hat{\Delta}=90^o$ (2)

Από (1) , (2)⇔ ΑΖΓΔ ορθογώνιο γιατί είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία

β) Στη συνέχεια να προεκτείνετε την ΔΓ προς το Γ, κατά τμήμα ΓΗ=ΒΔ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΗΒ που σχηματίζεται, είναι ισοσκελές τραπέζιο.

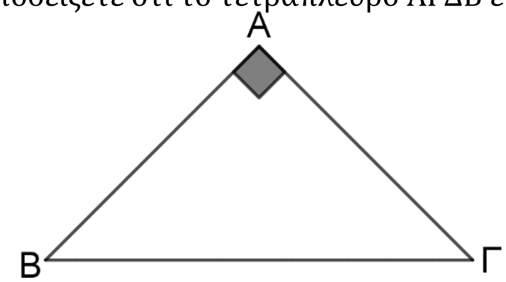


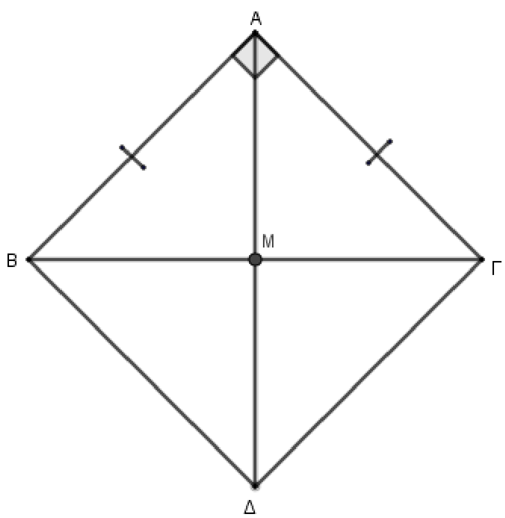
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΒ, ΖΓΗ:

$$\left.\begin{aligned} B\Delta &= \Gamma H (\text{δεδομένο}) \\ \hat{\Delta} &= 90^o \ (\alpha \text{ ερώτημα}) \\ A\Delta &= Z\Gamma \ (\text{απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου}) \end{aligned}\right\} A\overset{\triangle}{\Delta}B = Z\overset{\triangle}{\Gamma}H \ (\Pi - \Gamma - \Pi)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Άρα } AB &= ZH \ (\text{Αντίστοιχα στοιχεία ίσων τριγώνων}) \\ AZ \,//\, BH & \ (AZ//\Delta\Gamma \text{ απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου}) \end{aligned}\right\} AZHB \text{ ισοσκελές τραπέζιο}$$

19. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^{\circ}, ΑΒ = ΑΓ$). Να φέρετε τη διάμεσο $ΑΜ$ και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $ΜΔ = ΑΜ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΔΒ είναι τετράγωνο.





ΒΜ=ΜΓ(ΑΜ διάμεσος)
ΑΜ=ΜΔ(δεδομένο)
Άρα ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται

$\widehat{Α} = 90^{\circ} \Rightarrow$ *ΑΒΓΔ ορθογώνιο γιατί είναι παραλληλόγραμμο και λεχει μια ορθή γωνία* (1)
ΑΒ=ΑΓ(δεδομένο)
$\Rightarrow$ *ΑΒΓΔ ρόμβος γιατί είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες* (2)
Από (1) και (2) $\Rightarrow$ ΑΓΔΒ τετράγωνοΑΓΔΒ γιατί είναι ορθογώνιο και ρόμβος.