

ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\begin{aligned} \alpha) (\chi - 3)^2 &= \chi^2 - 2 \cdot \chi \cdot 3 + 3^2 \\ &= \chi^2 - 6\chi + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) (5\chi + 3\omega) \cdot (3\omega - 5\chi) &= (3\omega + 5\chi)(3\omega - 5\chi) \\ &= (3\omega)^2 - (5\chi)^2 \\ &= 9\omega^2 - 25\chi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) (-5\chi^3 - 2\psi)^2 &= [-(5\chi^3 + 2\psi)]^2 = (5\chi^3 + 2\psi)^2 \\ &= (5\chi^3)^2 + 2 \cdot 5\chi^3 \cdot 2\psi + (2\psi)^2 \\ &= 25\chi^6 + 20\chi^3\psi + 4\psi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) (2\chi + \omega)^2 &= (2\chi)^2 + 2 \cdot 2\chi \cdot \omega + \omega^2 \\ &= 4\chi^2 + 4\chi\omega + \omega^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon) (7 + \sqrt{2})(7 - \sqrt{2}) &= 7^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 49 - 2 \\ &= 47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) \left(\frac{\alpha}{3} + 3\beta^2\right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\alpha}{3} \cdot 3\beta^2 + (3\beta^2)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{9} + 2\alpha\beta^2 + 9\beta^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta) (\beta^4 + 1)(\beta^2 + 1)(\beta + 1)(\beta - 1) &= (\beta^4 + 1)(\beta^2 + 1)(\beta^2 - 1) \\ &= (\beta^4 + 1)(\beta^4 - 1) \\ &= \beta^8 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta) \left(\frac{1}{3\chi} - \chi\right)^2 &= \left(\frac{1}{3\chi}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3\chi} \cdot \chi + (\chi)^2 \\ &= \frac{1}{9\chi^2} + \frac{2}{3} + \chi^2 \end{aligned}$$

2. Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\chi = -2$
 $2\chi(3\chi + 1)(3\chi - 1) - (3\chi - 2)^2$

$$\begin{aligned} A &= 2\chi(3\chi + 1)(3\chi - 1) - (3\chi - 2)^2 \\ &= 2\chi [(3\chi)^2 - 1^2] - [(3\chi)^2 - 2 \cdot 3\chi \cdot 2 + 2^2] \\ &= 2\chi (9\chi^2 - 1) - (9\chi^2 - 12\chi + 4) \\ &= 18\chi^3 - 9\chi^2 + 10\chi - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } \chi = -2 \text{ τότε } A &= 18(-2)^3 - 9(-2)^2 + 10(-2) - 4 \\ &= 18 \cdot 8 - 9 \cdot 4 - 20 - 4 \\ &= 144 - 36 - 24 \\ &= 144 - 60 \\ &= 84 \end{aligned}$$

3. Αν $\chi = \frac{1}{\psi}$, να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του χ και ψ :

$$\begin{aligned} A &= (5\chi - \psi)^2 - (5\chi - 3)(5\chi + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2 \\ &= (5\chi)^2 - 2 \cdot 5\chi \cdot \psi + \psi^2 - [(5\chi)^2 - 3^2] + 4\psi - (\psi^2 + 2 \cdot \psi \cdot 2 + 2^2) \\ &= 25\chi^2 - 10\chi\psi + \psi^2 - (25\chi^2 - 9) + 4\psi - \psi^2 - 4\psi - 4 \\ &= 25\chi^2 - 10\chi\psi + \psi^2 - 25\chi^2 + 9 + 4\psi - \psi^2 - 4\psi - 4 \\ &= -10\chi\psi + 5 \\ &= -10 \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \psi + 5 \quad (\text{αντικαθιστούμε } \chi = \frac{1}{\psi}) \\ &= -10 + 5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

4. Αν $2\chi + \phi = -5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\begin{aligned} A &= (2\chi - \phi)^2 + 7\chi\phi - \chi(2 - \phi) + 2\chi \\ &= (2\chi)^2 - 2 \cdot 2\chi \cdot \phi + \phi^2 + 7\chi\phi - 2\chi + \chi\phi + 2\chi \\ &= 4\chi^2 - 4\chi\phi + \phi^2 + 7\chi\phi - 2\chi + \chi\phi + 2\chi \\ &= 4\chi^2 + 4\chi\phi + \phi^2 = (2\chi + \phi)^2 = (-5)^2 = +25 \end{aligned}$$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$$

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= (3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) \\ &= (3\alpha)^2 + 2 \cdot 3\alpha \cdot 2\beta + (2\beta)^2 - 5[\alpha^2 - (2\beta)^2] - 24\beta\alpha - 15\beta^2 \\ &= 9\alpha^2 + 12\alpha\beta + 4\beta^2 - 5(\alpha^2 - 4\beta^2) - 24\alpha\beta - 15\beta^2 \\ &= 9\alpha^2 + 12\alpha\beta + 4\beta^2 - 5\alpha^2 + 20\beta^2 - 24\alpha\beta - 15\beta^2 \\ &= 4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Β' μέλος} &= (2\alpha - 3\beta)^2 \\ &= (2\alpha)^2 - 2 \cdot 2\alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 \\ &= 4\alpha^2 - 12\alpha\beta + 9\beta^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) \Rightarrow Α' μέλος = Β' μέλος

6. Αν $\chi \cdot \psi = 2$, να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα $\left(\frac{\chi-2\psi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\chi+2\psi}{3}\right)^2 = -\frac{16}{9}$

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= \left(\frac{\chi-2\psi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\chi+2\psi}{3}\right)^2 \\ &= \frac{(\chi-2\psi)^2}{3^2} - \frac{(\chi+2\psi)^2}{3^2} \\ &= \frac{\chi^2 - 2\chi \cdot 2\psi + (2\psi)^2}{9} - \frac{\chi^2 + 2\chi \cdot 2\psi + (2\psi)^2}{9} \\ &= \frac{\chi^2 - 4\chi\psi + 4\psi^2}{9} - \frac{\chi^2 + 4\chi\psi + 4\psi^2}{9} \\ &= \frac{\chi^2 - 4\chi\psi + 4\psi^2 - (\chi^2 + 4\chi\psi + 4\psi^2)}{9} \\ &= \frac{\chi^2 - 4\chi\psi + 4\psi^2 - \chi^2 - 4\chi\psi - 4\psi^2}{9} \\ &= \frac{-8\chi\psi}{9} \\ &= \frac{-8 \cdot 2}{9} \quad (\text{αντικαθιστούμε } \chi\psi = 2) \\ &= -\frac{16}{9} = \text{Β' μέλος} \end{aligned}$$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με $(3\chi+1)$ cm και $(4\chi-1)$ cm. Αν η υποτείνουσα του ισούται με 5 χ cm, να βρείτε την τιμή του χ .

Έστω $ΑΓ=3\chi+1$, $ΑΒ=4\chi-1$ και $ΒΓ=5\chi$

$$\text{Π.Θ. : } (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2$$

$$\Leftrightarrow (3\chi+1)^2 + (4\chi-1)^2 = (5\chi)^2$$

$$\Leftrightarrow [(3\chi)^2 + 2 \cdot 3\chi \cdot 1 + 1^2] + [(4\chi)^2 - 2 \cdot 4\chi \cdot 1 + 1^2] = 25\chi^2$$

$$\Leftrightarrow 9\chi^2 + 6\chi + 1 + 16\chi^2 - 8\chi + 1 = 25\chi^2$$

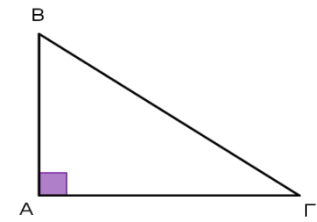
$$\Leftrightarrow 9\chi^2 + 6\chi + 1 + 16\chi^2 - 8\chi + 1 - 25\chi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\chi + 1 - 8\chi + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\chi + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\chi = -2$$

$$\Leftrightarrow \chi = 1$$



8. Αν $2x - 3y = 10$ και $3xy = -3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4x^2 + 9y^2$

$$(2x - 3y)^2 = 10^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + 9y^2 = 10^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12xy + 9y^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 100 + 12xy \quad (\text{Αντικαθιστούμε το } 3xy \text{ με } -3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 100 + 4(-3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 100 - 12$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = -88$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Παραγοντοποίηση-Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Να κάνετε τις πιο κάτω διαιρέσεις:

α) $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x - 14) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x - 14 & x - 2 \\
 \underline{-x^4 + 2x^3} & \\
 +5x^2 - 3x - 14 & \\
 \underline{-5x^2 + 10x} & \\
 7x - 14 & \\
 \underline{-7x + 14} & \\
 0 & \\
 \hline
 \end{array}$$

β) $(2x^3 - x^2 + 7x + 5) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - x^2 + 7x + 5 & x + 1 \\
 \underline{-2x^3 - 2x^2} & \\
 -3x^2 + 7x + 5 & \\
 \underline{+3x^2 + 3x} & \\
 10x + 5 & \\
 \underline{-10x - 10} & \\
 -5 & \\
 \hline
 \end{array}$$

γ) $(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 6) : (x^2 - 2x + 3)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 6 & x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} & \\
 +2x^2 - 4x + 6 & \\
 \underline{-2x^2 + 4x - 6} & \\
 0 & \\
 \hline
 \end{array}$$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ που όταν διαιρεθεί με $x+1$ δίνει πηλίκο $3x+2$ και υπόλοιπο $-x+3$.

$$\delta(x) = x + 1$$

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$$

$$\pi(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = (x+1) \cdot (3x+2) + (-x+3)$$

$$\upsilon(x) = -x + 3$$

$$= 3x^2 + 2x + 3x + 2 - x + 3$$

$$= 3x^2 + 4x + 5$$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4\chi + 4\psi + 8\omega = 4(\chi + \psi + 2\omega)$

β) $3\chi - 3\psi - \omega\chi + \omega\psi = 3(\chi - \psi) - \omega(\chi - \psi) = (\chi - \psi)(3 - \omega)$

γ) $9\chi^2 - 16\psi^2 = (3\chi)^2 - (4\psi)^2 = (3\chi + 4\psi)(3\chi - 4\psi)$

δ) $\chi^2 - \chi - 30 = (\chi - 6)(\chi + 5)$

ε) $25\chi^2 + 40\chi + 16 = (5\chi)^2 + 2 \cdot 5\chi \cdot 4 + 4^2 = (5\chi + 4)^2$

στ) $\psi^3 - 25\psi = \psi(\psi^2 - 25) = \psi(\psi + 5)(\psi - 5)$

ζ) $2\chi^2 - 14\chi + 20 = 2(\chi^2 - 7\chi + 10) = 2(\chi - 5)(\chi - 2)$

η) $-\psi^2 + 8\psi - 15 = -(\psi^2 - 8\psi + 15) = -(\psi - 5)(\psi - 3) = (5 - \psi)(\psi - 3)$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2) = \alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 + 2\beta$

$$= \underbrace{\alpha^2 - \beta^2}_{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} - \underbrace{2\alpha + 2\beta}_{2(\alpha + \beta)}$$

$$= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - 2(\alpha + \beta)$$

$$= (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2)$$

β) $(\chi - 3\omega)^2 + (\chi - 3\omega) - 6 = [(\chi - 3\omega) + 3][(\chi - 3\omega) - 2] = (\chi - 3\omega + 3)(\chi - 3\omega - 2)$

γ) $\underbrace{\chi^2 - 6\chi + 9}_{(\chi - 3)^2} - \underbrace{2\beta\chi + 6\beta}_{2\beta(\chi + 3)} = (\chi - 3)^2 - 2\beta(\chi + 3)$

$$= (\chi - 3)(\chi - 3 - 2\beta)$$

δ) $\chi^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4\chi = \underbrace{\chi^2 - 4\chi + 4}_{(\chi - 2)^2} - \underbrace{9\psi^2 - 6\psi - 1}_{(3\psi + 1)(3\psi - 1)}$

$$\begin{aligned}
 &= (\chi - 2)^2 - (9\psi^2 + 6\psi + 1) \\
 &= (\chi - 2)^2 - (3\psi + 1)^2 \\
 &= (\chi - 2 + 3\psi + 1) [(\chi - 2) - (3\psi + 1)] \\
 &= (\chi - 1 + 3\psi) (\chi - 2 - 3\psi - 1) \\
 &= (\chi - 1 + 3\psi) (\chi - 3 - 3\psi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon) 16\chi^4 - 81\psi^4 &= (4\chi^2)^2 - (9\psi^2)^2 \\
 &= (4\chi^2 + 9\psi^2) (4\chi^2 - 9\psi^2) \\
 &= (4\chi^2 + 9\psi^2) [(2\chi)^2 - (3\psi)^2] \\
 &= (4\chi^2 + 9\psi^2)(2\chi + 3\psi) (2\chi - 3\psi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma) \underbrace{3\rho^2 - 3\omega^2} - \underbrace{\omega^2 - 2\rho\omega - \rho^2} &= 3(\rho^2 - \omega^2) - (\rho^2 + 2\rho\omega + \omega^2) \\
 &= 3(\rho + \omega)(\rho - \omega) - (\rho + \omega)^2 \\
 &= (\rho + \omega) [3(\rho - \omega) - (\rho + \omega)] \\
 &= (\rho + \omega)(3\rho - 3\omega - \rho - \omega) \\
 &= (\rho + \omega)(2\rho - 4\omega) \\
 &= (\rho + \omega) \cdot 2 \cdot (\rho - 2\omega) \\
 &= 2(\rho + \omega)(\rho - 2\omega)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta) \alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) - 25 + \alpha^2 &= \alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) + \underbrace{\alpha^2 - 25} \\
 &= \alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) + (\alpha + 5)(\alpha - 5) \\
 &= (\alpha - 5)[\alpha^2 + (3\alpha - 2) + (\alpha + 5)] \\
 &= (\alpha - 5)(\alpha^2 + 4\alpha + 3) \\
 &= (\alpha - 5)(\alpha + 3)(\alpha + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta) \chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2 &= (\chi - 3\psi)^2 - (2\omega)^2 = (\chi - 3\psi + 2\omega) (\chi - 3\psi - 2\omega) \\
 \theta) (\chi^2 - 6\chi + 3)^2 - (\chi - 9)^2 &= [(\chi^2 - 6\chi + 3) + (\chi - 9)] [(\chi^2 - 6\chi + 3) - (\chi - 9)] \\
 &= (\chi^2 - 5\chi - 6)(\chi^2 - 6\chi + 3 - \chi + 9) \\
 &= (\chi^2 - 5\chi - 6)(\chi^2 - 7\chi + 12) \\
 &= (\chi - 6)(\chi + 1)(\chi - 3)(\chi - 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota) 4(\chi - 1) + 9\chi^2(1 - \chi) &= 4(\chi - 1) - 9\chi^2(\chi - 1) \\ &= (\chi - 1)(4 - 9\chi^2) \\ &= (\chi - 1)[2^2 - (3\chi)^2] \\ &= (\chi - 1)(2 + 3\chi)(2 - 3\chi) \end{aligned}$$

5. Αν $\chi = 101$ και $\psi = 99$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης.

$$\begin{aligned} A = 2\chi^3 + 6\chi\psi^2 - 2\psi^3 - 6\chi^2\psi &= \underbrace{2\chi^3 - 2\psi^3} + \underbrace{6\chi\psi^2 - 6\chi^2\psi} \\ &= 2(\chi^3 - \psi^3) + 6\chi\psi(\psi - \chi) \\ &= 2(\chi - \psi)(\chi^2 + \chi\psi + \psi^2) - 6\chi\psi(\chi - \psi) \\ &= 2(\chi - \psi)(\chi^2 + \chi\psi + \psi^2 - 3\chi\psi) \\ &= 2(\chi - \psi)(\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2) \\ &= 2(\chi - \psi)(\chi - \psi)^2 \\ &= 2(\chi - \psi)^3 \end{aligned}$$

Για $\chi = 101$ και $\psi = 99$ τότε $A = 2(\chi - \psi)^3 = 2(101 - 99)^3 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi^2 - 8\chi = 0$

$\Leftrightarrow \chi(\chi - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \chi = 0$ ή $\chi = 8$

β) $\chi^2 - 64 = 0$

$\Leftrightarrow (\chi + 8)(\chi - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \chi + 8 = 0$ ή $\chi - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \chi = -8$ ή $\chi = 8$

γ) $\chi^2 - 2\chi = 15$

$\Leftrightarrow \chi^2 - 2\chi - 15 = 0$

$\Leftrightarrow (\chi + 3)(\chi - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \chi + 3 = 0$ ή $\chi - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \chi = -3$ ή $\chi = 5$

δ) $(\chi + 5)(\chi^2 - 2\chi - 3)(2\chi - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \chi + 5 = 0$ ή $\chi^2 - 2\chi - 3 = 0$ ή $2\chi - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \chi = -5$ ή $(\chi - 3)(\chi + 1) = 0$ ή $\chi = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \chi = -5$ ή $\chi - 3 = 0$ ή $\chi + 1 = 0$ ή $\chi = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \chi = -5$ ή $\chi = 3$ ή $\chi = -1$ ή $\chi = \frac{5}{2}$

ε) $25\psi^2 - 20\psi + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (5\psi - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5\psi - 2 = 0$

στ) $2\chi^2 - \chi - 10 = 0$

$\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -10$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)$

$$\Leftrightarrow \Psi = \frac{2}{5} \text{ (διπλή ρίζα)} \qquad = 1 + 80 = 81 > 0$$

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$$\chi_1 = \frac{1+9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{ή} \quad \chi_2 = \frac{1-9}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\begin{aligned} \zeta) \quad & 3(3\chi - 4) = \chi(\chi + 2) \\ & \Leftrightarrow 9\chi - 12 = \chi^2 + 2\chi \\ & \Leftrightarrow \chi^2 + 2\chi - 9\chi + 12 = 0 \\ & \Leftrightarrow \chi^2 - 7\chi + 12 = 0 \\ & \Leftrightarrow (\chi - 3)(\chi - 4) = 0 \\ & \Leftrightarrow \chi - 3 = 0 \quad \text{ή} \quad \chi - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow \chi = 3 \quad \text{ή} \quad \chi = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta) \quad & 3\chi^2 - 5\chi + 4 = 0 \\ & \alpha = 3, \quad \beta = -5, \quad \gamma = +4 \\ & \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 \\ & \qquad = 25 - 48 \\ & \qquad = -23 < 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

7. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10} = \frac{(\chi+5)(\chi-5)}{2(\chi-5)} = \frac{(\chi+5)}{2} \quad \text{ορίζεται όταν, } 2(\chi - 5) \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 5$$

$$\beta) \frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3} = \frac{5\alpha\beta(\alpha-\beta)}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)} = \frac{5\alpha\cancel{\beta}(\alpha-\beta)}{\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \frac{5}{\alpha+\beta} \quad \text{ορίζεται όταν, } \alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq -\beta \text{ και } \alpha \neq \beta$$

8. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\chi\psi^2}{\chi^2+3\chi-18} \cdot \frac{4\chi+24}{\chi\psi} = \frac{\chi\psi^2}{(\chi-3)(\chi+6)} \cdot \frac{4(\chi+6)}{\chi\psi} = \frac{4\psi}{\chi-3}$$

$$\beta) \frac{\chi^2-8\chi+12}{\chi^2-36} : \frac{3\chi-6}{\chi^2+5\chi-6} = \frac{(\chi-2)(\chi-6)}{(\chi-6)(\chi+6)} : \frac{3(\chi-2)}{(\chi+6)(\chi-1)} = \frac{(\chi-2)(\chi-6)}{(\chi-6)(\chi+6)} \cdot \frac{(\chi+6)(\chi-1)}{3(\chi-2)} = \frac{(\chi-1)}{3}$$

$$\gamma) \frac{2\chi}{\chi^2-25} + \frac{1}{5-\chi} - \frac{3}{\chi^2+5\chi} = \frac{\chi}{(\chi+5)(\chi-5)} - \frac{\chi(\chi+5)}{\chi-5} - \frac{(\chi-5)}{\chi(\chi+5)} \quad \text{Ε.Κ.Π.} = \chi(\chi+5)(\chi-5)$$

$$= \frac{2\chi^2 - \chi(\chi+5) - 3(\chi-5)}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{2\chi^2 - \chi^2 - 5\chi - 3\chi + 15}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{\chi^2 - 8\chi + 15}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{(\chi-3)(\chi-5)}{\chi(\chi+5)(\chi-5)}$$

$$= \frac{(\chi-3)}{\chi(\chi+5)}$$

$$\delta) \frac{3\chi^2-3}{\chi^3+\chi^2-2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2-4} + \frac{1}{\chi+2} \right) = \frac{3(\chi^2-1)}{\chi(\chi^2+\chi-2)} : \left(\frac{3}{(\chi+2)(\chi-2)} + \frac{1}{\chi+2} \right)$$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} : \left(\frac{3}{(\chi+2)(\chi-2)} + \frac{1}{\chi+2} \right) \quad \text{E. K. Π.} = (\chi+2)(\chi-2)$$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} : \frac{3+(\chi-2)}{(\chi+2)(\chi-2)}$$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} : \frac{\chi+1}{(\chi+2)(\chi-2)}$$

$$= \frac{3(\chi+1)(\chi-1)}{\chi(\chi+2)(\chi-1)} \cdot \frac{(\chi+2)(\chi-2)}{\chi+1}$$

$$= \frac{3(\chi-2)}{\chi}$$

9. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\frac{\chi}{\psi} - \frac{9\psi}{\chi}}{\frac{\chi^2-6\chi\psi}{\psi^2} + 9} = \frac{\frac{\chi^2-9\psi^2}{\chi\psi}}{\frac{\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2}{\psi^2}} = \frac{\chi^2-9\psi^2}{\chi\psi} : \frac{\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2}{\psi^2}$$

$$= \frac{(\chi+3\psi)(\chi-3\psi)}{\chi\psi} \cdot \frac{\psi^2}{\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2}$$

$$= \frac{(\chi+3\psi)(\chi-3\psi)}{\chi\psi} \cdot \frac{\psi^2}{(\chi-3\psi)^2}$$

$$= \frac{\psi(\chi+3\psi)}{\chi(\chi-3\psi)}$$

$$\beta) \frac{\frac{\chi^2-16}{\chi^2+3\chi-4}}{\frac{\chi^2-4\chi}{\chi^2}} = \frac{\chi^2-16}{\chi^2+3\chi-4} : \frac{\chi^2-4\chi}{\chi^2} = \frac{(\chi+4)(\chi-4)}{(\chi+4)(\chi-1)} \cdot \frac{\chi^2}{\chi(\chi-4)} = \frac{\chi}{\chi-1}$$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{\chi-2}{\chi} + \frac{4}{\chi-2} = \frac{8}{\chi^2-2\chi} \Leftrightarrow \frac{\chi-2}{\chi} + \frac{\chi}{\chi-2} = \frac{1}{\chi(\chi-2)}$$

Ε.Κ.Π. = $\chi(\chi-2) \neq 0 \Leftrightarrow$
 $\chi \neq 0$ και $\chi \neq 2$

$$\Leftrightarrow (\chi-2)^2 + 4\chi = 8$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 - 4\chi + 4 + 4\chi - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 + 4 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\chi+2)(\chi-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi+2 = 0 \text{ ή } \chi-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \chi = -2 \text{ ή } \chi = 2$$

δεκτή απορρίπτεται

$$\beta) \frac{y+2}{y} = \frac{y+3}{y+4} - \frac{4}{y^2+4y} \Leftrightarrow \frac{y+4}{\overline{y+2}} = \frac{y}{\overline{y+3}} - \frac{1}{\overline{4}} \frac{1}{y(y+4)}$$

Ε.Κ.Π. = $y(y+4) \neq 0 \Leftrightarrow$
 $y \neq 0$ και $y \neq -4$

$$\Leftrightarrow (y+2)(y+4) = y(y+3) - 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 2y + 8 = y^2 + 3y - 4$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 2y + 8 - y^2 - 3y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = -12$$

$$\Leftrightarrow y = -4 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\gamma) \frac{3}{y+5} - \frac{y}{y-5} = \frac{y^2+25}{25-y^2} \Leftrightarrow \frac{3}{y+5} - \frac{y}{y-5} = \frac{y^2+25}{-(y^2-25)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y+5} - \frac{\tilde{y}}{y-5} = -\frac{1}{(y+5)(y-5)}$$

Ε.Κ.Π. = $(y-5)(y+5) \neq 0 \Leftrightarrow$
 $y \neq 5$ και $y \neq -5$

$$\Leftrightarrow 3(y-5) - y(y+5) = -(y^2+25)$$

$$\Leftrightarrow 3y - 15 - y^2 - 5y = -y^2 - 25$$

$$\Leftrightarrow 3y - 15 - y^2 - 5y = -y^2 - 25$$

$$\Leftrightarrow 3y - 15 - y^2 - 5y + y^2 + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2y = -10$$

$$\Leftrightarrow y = 5 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\delta) \frac{2y}{y^2+y} = 1 - \frac{2}{y+1} \Leftrightarrow \frac{1}{y(y+1)} = \frac{y}{y+1} - \frac{2}{y+1}$$

$$\text{Ε. Κ. Π.} = y(y+1) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0 \text{ και } y \neq -1$$

$$\Leftrightarrow 2y = y(y+1) - 2y$$

$$\Leftrightarrow 2y = y^2 + y - 2y$$

$$\Leftrightarrow 2y - y^2 - y + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow -y^2 + 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow -y(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ή} \quad y - 3 = 0$$

απορρίπτεται $y = 3$ δεκτή

$$\epsilon) \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{\rho^2-1} = 4 \Leftrightarrow \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{(\rho+1)(\rho-1)} = 4$$

$$\text{Ε. Κ. Π.} = (\rho+1)(\rho-1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho(\rho+1) + 6 = 4(\rho+1)(\rho-1)$$

$$\rho \neq -1 \text{ και } \rho \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 + \rho + 6 = 4(\rho^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 + \rho + 6 = 4\rho^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 + \rho + 6 - 4\rho^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\rho^2 + \rho + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\rho^2 - \rho - 10 = 0$$

$$\alpha = 3, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -10$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)$$

$$= 1 + 120$$

$$= 121 > 0$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 11}{6} \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{1+11}{4} = \frac{12}{4} = 4 \text{ δεκτή} \\ \text{ή} \\ \rho_2 = \frac{1-11}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \text{ δεκτή} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) \frac{3}{\omega^2-3\omega-4} &= \frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega} + \frac{4}{\omega^2-4\omega} \Leftrightarrow \frac{3}{(\omega-4)(\omega+1)} = \frac{2\omega+5}{\omega(\omega^2+2\omega+1)} + \frac{4}{\omega(\omega-4)} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{(\omega-4)(\omega+1)} = \frac{2\omega+5}{\omega(\omega^2+2\omega+1)} + \frac{4}{\omega(\omega-4)} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{(\omega-4)(\omega+1)} = \frac{2\omega+5}{\omega(\omega+1)^2} + \frac{4}{\omega(\omega-4)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\omega(\omega+1)}{3} = \frac{\omega-4}{2\omega+5} + \frac{(\omega+1)^2}{4} \quad \text{E. K. Π.} = \omega(\omega+1)^2(\omega-4) \\ &\qquad\qquad\qquad \omega \neq 0, \omega \neq -1 \text{ και } \omega \neq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 3\omega(\omega+1) = (\omega-4)(2\omega+5) + 4(\omega+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 3\omega^2 + 3\omega = 2\omega^2 + 5\omega - 8\omega - 20 + 4(\omega^2 + 2\omega + 1) \\ &\Leftrightarrow 3\omega^2 + 3\omega = 2\omega^2 + 5\omega - 8\omega - 20 + 4\omega^2 + 8\omega + 4 \\ &\Leftrightarrow 2\omega^2 + 5\omega - 8\omega - 20 + 4\omega^2 + 8\omega + 4 - 3\omega^2 - 3\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\omega^2 + 2\omega - 16 = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -16$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) \\ &= 4 + 192 \\ &= 196 > 0 \end{aligned}$$

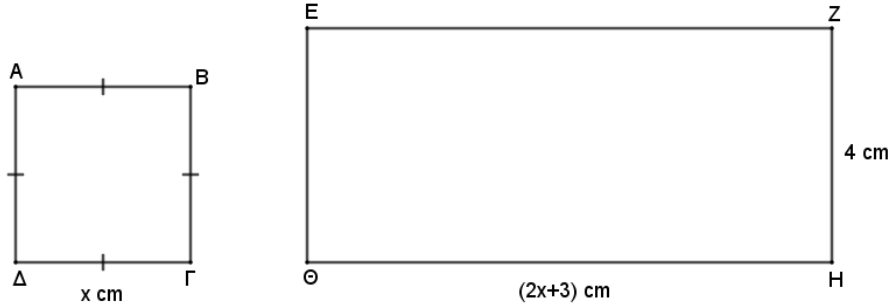
$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 14}{6} \begin{cases} \omega_1 = \frac{-2+14}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ δεκτή} \\ \text{ή} \\ \omega_2 = \frac{-2-14}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3} \text{ δεκτή} \end{cases}$$

11. Γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι 48. Αν ο ένας αριθμός είναι κατά δύο μικρότερος από τον άλλο αριθμό, να βρείτε τους δύο αριθμούς.

$$x \cdot y = 48$$

$$\begin{aligned} x &= y - 2 \\ &\Leftrightarrow (y - 2)y = 48 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 2y = 48 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 2y - 48 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y + 6)(y - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -6 \text{ απορρίπτεται} \\ &\text{ή } y = 8 \text{ δεκτή} \\ &\text{Άρα } x = 8 - 2 \\ &\Leftrightarrow x = 6 \\ &\text{Λύση: } (x, y) = (6, 8) \end{aligned}$$

12. Αν το εμβαδόν του ορθογώνιου ΕΖΗΘ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε την τιμή του x .



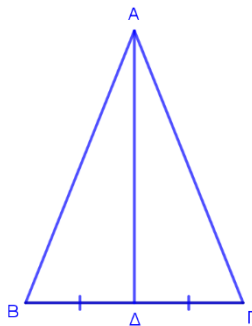
$$\begin{aligned}
 E_{\{\text{ορθ}\}} &= 4 \cdot E_{\{\text{τετρ}\}} \\
 \Leftrightarrow (2x + 3) \cdot 4 &= 4 \cdot x^2 \\
 \Leftrightarrow 8x + 12 &= 4x^2 \\
 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 12 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4(x^2 - 2x - 3) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 &\text{ δεκτή} \\
 \text{ή } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 &\text{ απορρίπτεται}
 \end{aligned}$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Γεωμετρία –Ισα Τρίγωνα

1. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ) τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

Α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα .	Σ	Ⓐ
Β) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.	Σ	Ⓐ
Γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και μία γωνία του ενός είναι ίση με την αντίστοιχή της στο άλλο τρίγωνο, τότε θα είναι ίσα.	Σ	Ⓐ
Δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση μία προς μία, και έχουν μια κάθετη πλευρά τους αντίστοιχα ίση τότε θα είναι ίσα.	Ⓢ	Λ

2. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος.



Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ,

- 1. $AB=AG$ (ABG ισοσκελές τρίγωνο) Π
- 2. AD κοινή πλευρά Π
- 3. $BD=DG$ (AD διάμεσος) Π

Έχουμε κριτήριο Π-Π-Π

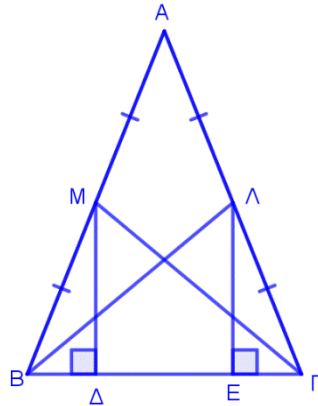
$$\Rightarrow \triangle AB\Delta = \triangle AG\Delta$$

όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα

$$\Rightarrow \widehat{B\Delta A} = \widehat{D\Delta G} \Rightarrow AD \text{ διχοτόμος του } \triangle ABG$$

Από τη ισότητα των πιο πάνω τριγώνων $\widehat{B\Delta A} = \widehat{G\Delta A}$ και επειδή $\widehat{B\Delta A} + \widehat{G\Delta A} = 180^\circ$ τότε $\widehat{B\Delta A} = \widehat{G\Delta A} = 90^\circ$. Επομένως AD είναι ύψος του τριγώνου ABG .

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), M και Λ είναι μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :
- α) $BL=GM$
 β) Τα σημεία M και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά $B\Gamma$.



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ABL και AGM ,

1. $AB=AG$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο) Π
2. \hat{A} κοινή γωνία Γ
3. $AL=AM$ ($AB=AG$, M μέσο AB και Λ μέσο AG) Π
 μισά ίσων πλευρών

Έχουμε κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Pi$

$\Rightarrow \triangle B\Lambda L = \triangle G\Gamma M$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow BL=GM$

β) φέρουμε τις αποστάσεις MD και ΛE στην $B\Gamma$.

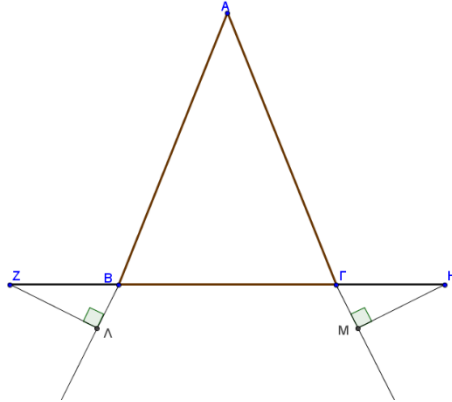
Συγκρίνω τα τρίγωνα BMD και $\Gamma\Lambda E$,

1. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) Γ
2. $MB=\Lambda\Gamma$ ($AB=AG$, M μέσο AB και Λ μέσο AG) Π
 μισά ίσων πλευρών
3. $\hat{\Delta} = \hat{E} = 90^\circ$ ($MD \perp B\Gamma$ και $\Lambda E \perp B\Gamma$) O

Έχουμε κριτήριο $\Pi-\Gamma-O$

$\Rightarrow \triangle BMD = \triangle \Gamma\Lambda E$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow MD=\Lambda E$
 Άρα τα σημεία M και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά $B\Gamma$

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά τμήματα $BZ=GH$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $Z\Lambda$ και HM είναι οι αποστάσεις των σημείων Z και H από τις πλευρές AB και AG αντίστοιχα, να δείξετε ότι $Z\Lambda=HM$.



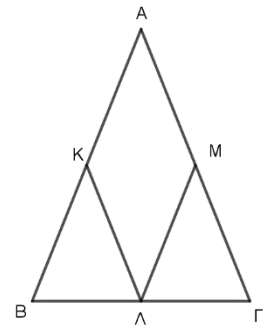
Συγκρίνω τα τρίγωνα $BZ\Lambda$ και GHM ,

1. $BZ=GH$ (δεδ.) \square
2. $\widehat{Z\Lambda B} = \widehat{H\Lambda M}$ ($\widehat{A\Lambda B} = \widehat{A\Lambda G}$ παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου
 $\widehat{A\Lambda B} = \widehat{Z\Lambda B}$ και $\widehat{A\Lambda G} = \widehat{H\Lambda M}$ κατακορυφήν) \square
3. $\widehat{\Lambda} = \widehat{M} = 90^\circ$ ($Z\Lambda \perp AB$ και $HM \perp AG$) \circ

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Ο

$\Rightarrow \triangle BZ\Lambda = \triangle GHM$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow Z\Lambda=HM$

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), αν K, Λ, M είναι μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, AG$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $AK=AM$.



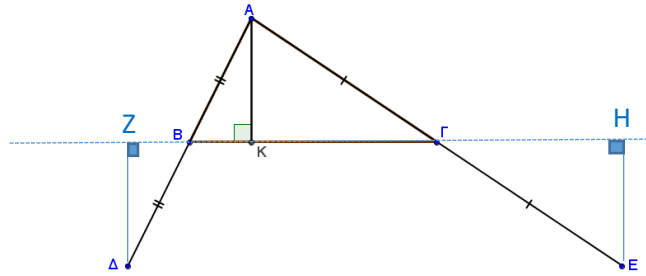
Συγκρίνω τα τρίγωνα $BK\Lambda$ και $GM\Lambda$,

1. $KB=MG$ ($AB=AG$, K μέσο AB και M μέσο AG) \square
μιά ίσων πλευρών
2. $\widehat{B} = \widehat{G}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) \square
3. $B\Lambda = \Lambda G$ (Λ μέσο $B\Gamma$) \square

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$\Rightarrow \triangle BK\Lambda = \triangle GM\Lambda$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow AK=AM$

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ύψος AK . Αν $AB=BD$ και $AG=GE$, να αποδείξετε ότι Δ και E ισαπέχουν από την $B\Gamma$



Συγκρίνω τα τρίγωνα $BZ\Delta$ και BKA ,

1. $AB=BD$ (δεδ.) Π
2. $\widehat{ZB\Delta} = \widehat{ABK}$ (κατακορυφήν γωνίες) Γ
3. $\widehat{Z} = \widehat{K} = 90^\circ$ ($\Delta Z \perp B\Gamma$ και AK ύψος) Θ

Έχουμε κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Theta$

$\Rightarrow \triangle BZ\Delta = \triangle BKA$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow Z\Delta=AK$ (1)

Συγκρίνω τα τρίγωνα $AK\Gamma$ και $\Gamma H E$,

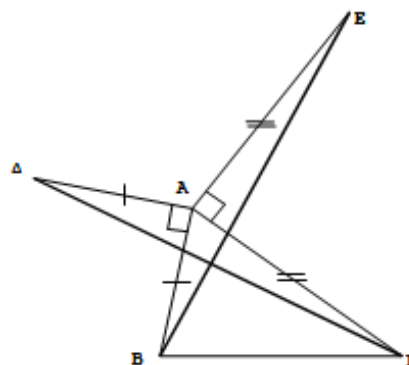
1. $AG=GE$ (δεδ.) Π
2. $\widehat{AK\Gamma} = \widehat{H\Gamma E}$ (κατακορυφήν γωνίες) Γ
3. $\widehat{K} = \widehat{H} = 90^\circ$ ($EH \perp B\Gamma$ και AK ύψος) Θ

Έχουμε κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Theta$

$\Rightarrow \triangle AK\Gamma = \triangle H\Gamma E$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow AK=HE$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow Z\Delta=HE \Rightarrow \Delta$ και E ισαπέχουν από την $B\Gamma$

7. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι τυχαίο τρίγωνο. Αν $AD=AB$, $AE=AG$ και $AD \perp AB$, $AE \perp AG$. Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta=BE$.



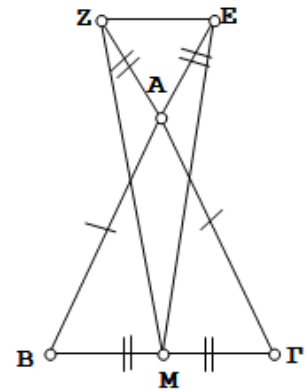
Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$ και $\triangle ABE$,

1. $A\Delta = AB$ (δεδ.) Π
2. $A\Gamma = AE$ (δεδ.) Π
3. $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = \widehat{B\hat{A}E}$ ($\widehat{\Delta\hat{A}B} + \widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{A}E} + \widehat{B\hat{A}\Gamma}$) Γ
 Άθροισμα ίσων γωνιών

Έχουμε κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Pi$

$\Rightarrow \triangle A\Delta\Gamma = \triangle ABE$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow \Gamma\Delta = BE$

8. Στο διπλανό σχήμα το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma$). Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $AZ = AE$, όπου AZ και AE είναι προεκτάσεις των $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.



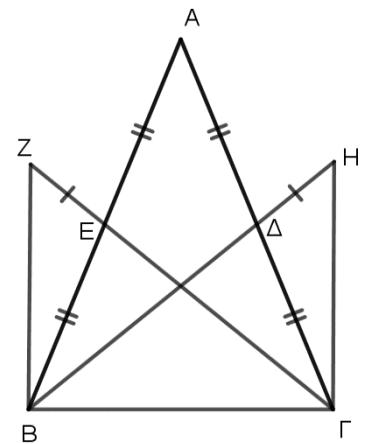
Συγκρίνω τα τρίγωνα $\triangle BME$ και $\triangle \Gamma MZ$,

1. $BE = \Gamma Z$ ($AB + AE = A\Gamma + AZ$, αφού $AB = A\Gamma$ και $AZ = AE$) Π
 Άθροισμα ίσων τμημάτων
2. $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) Γ
3. $BM = M\Gamma$ (M μέσο $B\Gamma$) Π

Έχουμε κριτήριο $\Pi-\Gamma-\Pi$

$\Rightarrow \triangle BME = \triangle \Gamma MZ$
 \Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα
 $\Rightarrow ME = MZ$ άρα το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να φέρετε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:
- α) $B\Delta$ και ΓE είναι ίσες.
 - β) στο ίδιο τρίγωνο να προεκτείνετε τις διαμέσους ΓE και $B\Delta$ κατά τμήματα EZ , ΔH αντίστοιχα έτσι ώστε $EZ = \Delta H$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle BZ\Gamma$ και $\triangle BH\Gamma$ είναι ίσα.



α) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ,

1. $BE = \Gamma\Delta$ ($AB = A\Gamma$ και $B\Delta, \Gamma E$ διάμεσοι) \square
 μισά ίσων πλευρών

2. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)
 Γ

3. ΒΓ κοινή πλευρά \square

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$$\Rightarrow B \overset{\Delta}{\triangle} \Gamma = \Gamma \overset{E}{\triangle} B$$

\Rightarrow όλα τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα

$$\Rightarrow B\Delta = \Gamma E$$

β) Συγκρίνω τα τρίγωνα ΒΖΓ και ΒΗΓ,

1. $BH = Z\Gamma$ ($B\Delta + \Delta H = \Gamma E + EZ$, αφού $B\Delta = \Gamma E$ και $\Delta H = EZ$) \square
 Άθροισμα ίσων τμημάτων

2. $B\hat{\Gamma}Z = \Gamma\hat{B}H$ (ως αντίστοιχα στοιχεία των ίσων
 τριγώνων $B \overset{\Delta}{\triangle} \Gamma = \Gamma \overset{E}{\triangle} B$) Γ

3. ΒΓ κοινή πλευρά \square

Έχουμε κριτήριο Π-Γ-Π

$$\Rightarrow B \overset{Z}{\triangle} \Gamma = B \overset{H}{\triangle} \Gamma$$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: Ευθεία -Γραμμικά Συστήματα

1. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων A(-1, 1) και B(3,4).

$\begin{matrix} \chi_1 & \psi_1 & & \chi_2 & \psi_2 \\ A(-1, & 1) & & B(3, & 4) \end{matrix}$	$(AB) = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$
	$(AB) = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (4 - 1)^2}$
	$(AB) = \sqrt{(3 + 1)^2 + 3^2}$
	$(AB) = \sqrt{4^2 + 9}$
	$(AB) = \sqrt{16 + 9}$
	$(AB) = \sqrt{25} = 5 \text{ μ.μ}$

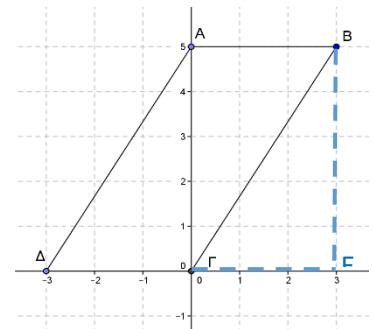
2. Δίνονται τα σημεία A(2,5) και B(-2, 3). Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB.

$\begin{matrix} \chi_1 & \psi_1 & & \chi_2 & \psi_2 \\ A(2, & 5) & & B(-2, & 3) \end{matrix}$	$\chi_M = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$
	$\psi_M = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$
	<p style="text-align: center;">Συντεταγμένες μέσου M(0,4)</p>

3. Από την διπλανή γραφική παράσταση να βρείτε:
α) τις συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ και Δ.

A(0,5) B(3,5) Γ(0,0) Δ(-3,0)

β) την εξίσωση των ευθειών AB και BΓ.



εξίσωση ευθείας AB :

τα σημεία A(0,5) και B(3,5) έχουν την ίδια τεταγμένη, άρα η ευθεία AB είναι της μορφής $\psi = \beta \Rightarrow \psi = 5$

εξίσωση ευθείας BΓ :

Η ευθεία περνά από το σημείο $\Gamma(0,0)$ δηλ. από την αρχή των αξόνων άρα είναι της μορφής $\psi = \alpha\chi$, όπου $\alpha = \lambda$

Από την γραφική παράσταση προκύπτει $\lambda_{B\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E} = \frac{5}{3}$

$$\psi = \alpha\chi \Rightarrow \psi = \frac{5}{3}\chi$$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_2: \psi = 2\chi - 1$ και τέμνει τον άξονα των ψ στο $(0, -8)$.

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ \varepsilon_2: \psi = 2\chi - 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \\ \varepsilon_1 \text{ τέμνει τον άξονα τον } \psi \text{ στο } (0, -8) \Rightarrow \beta = -8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Εξίσωση ευθείας } \varepsilon_1 \\ \psi = \alpha\chi + \beta \Rightarrow \psi = 2\chi - 8 \end{array}$$

β) περνά από το σημείο $A(2,3)$ και είναι κάθετη με στην ευθεία $\varepsilon_2: 4x + 2\psi = 3$.

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \\ \varepsilon_2: 4x + 2\psi = 3 \Leftrightarrow 2\psi = -4x + 3 \\ \Leftrightarrow \psi = \frac{-4x}{2} + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \psi = -2x + \frac{3}{2} \\ \text{άρα } \lambda_2 = -2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (-2) = -1 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-1}{-2} \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\varepsilon_1: \psi = \alpha\chi + \beta \Rightarrow \psi = \frac{1}{2}\chi + \beta$$

$$\text{Αντικαθιστούμε το σημείο } A(2,3) \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \beta \Rightarrow 3 = 1 + \beta \Rightarrow \beta = 3 - 1 \Rightarrow \beta = 2$$

$$\text{Εξίσωση ευθείας } \varepsilon_1: \psi = \frac{1}{2}\chi + 2$$

γ) περνά από το σημείο $B(-5, 1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_2: \psi = 2$

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2: \psi = 2$, άρα και η ε_1 είναι της μορφής $\psi = \beta$.

Αφού περνά από το σημείο $(-5,1)$, τότε $\varepsilon_1: \psi = 1$

δ) περνά από το σημείο $\Gamma(4, -2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: \chi = -3$

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2: \chi = -3$, άρα η ε_1 είναι της μορφής $\psi = \beta$.

Αφού περνά από το σημείο $(4, -2)$, τότε $\varepsilon_1: \psi = -2$.

ε) περνά από το σημείο Δ (3,-6) και είναι παράλληλη με την ευθεία ε₂: 3χ - y = 5

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\varepsilon_2: 3\chi - \psi = 5 \Leftrightarrow -\psi = -3\chi + 5$$

$$\Leftrightarrow \psi = \frac{-3\chi}{-1} + \frac{5}{-1}$$

$$\Leftrightarrow \psi = 3\chi - 5$$

$$\text{άρα } \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$$

$$\varepsilon_1: \psi = \alpha\chi + \beta \Rightarrow \psi = 3\chi + \beta$$

$$\text{Αντικαθιστούμε το σημείο } \Delta(3, -6) \Rightarrow -6 = 3 \cdot 3 + \beta \Rightarrow -6 = 9 + \beta \Rightarrow \beta = -9 - 6 \Rightarrow \beta = -15$$

$$\text{Εξίσωση ευθείας } \varepsilon_1: \psi = 3\chi - 15$$

5. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(1,0) Β(2,4) και Γ(5, -1).

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

$$\lambda_{AB} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{4 - 0}{2 - 1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lambda_{AG} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{-1 - 0}{5 - 1} = \frac{-1}{4}$$

$$\lambda_{BG} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{-1 - 4}{5 - 2} = \frac{-5}{3}$$

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{AG} = 4 \cdot \frac{-1}{4} = -1$$

Συνθήκη Καθετότητας άρα, $AB \perp AG \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ.

$$\text{ΑΔ ύψος} \Rightarrow \text{ΑΔ} \perp \text{ΒΓ} \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} = -1 : \left(-\frac{5}{3}\right) = -1 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\psi = \alpha\chi + \beta \Leftrightarrow \psi = \frac{3}{5}\chi + \beta$$

$$\text{Αντικαθιστούμε το σημείο Α(1,0)} \Rightarrow 0 = \frac{3}{5} \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Εξίσωση ύψους ΑΔ : } \psi = \frac{3}{5}\chi - \frac{3}{5}$$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΕ.

ΒΕ διάμεσος \Rightarrow Ε μέσο ΑΓ

$$\chi_E = \frac{\chi_A + \chi_\Gamma}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad \psi_E = \frac{\psi_A + \psi_\Gamma}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow E(3, -\frac{1}{2})$$

$$\lambda_{EB} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{4 - (-\frac{1}{2})}{2 - 3} = \frac{4 + \frac{1}{2}}{-1} = \frac{\frac{9}{2}}{-1} = -\frac{9}{2}$$

$$\psi = \alpha\chi + \beta \Leftrightarrow \psi = -\frac{9}{2}\chi + \beta$$

$$\text{Αντικαθιστούμε το σημείο } B(2,4) \Rightarrow 4 = -\frac{9}{2} \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta - 9 = 4 \Leftrightarrow \beta = 9 + 4 \Leftrightarrow \beta = 13$$

$$\text{Εξίσωση διαμέσου } BE : \psi = -\frac{9}{2}\chi + 13$$

6. Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2\chi - 5$ και $\varepsilon_2: y = (2\alpha - 7)\chi + 9$ να είναι παράλληλες.

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2\alpha - 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\alpha - 7 = 2 \\ 2\alpha = 7 + 2 \\ 2\alpha = 9 \\ \alpha = \frac{9}{2} \end{array}$$

7. Να εξετάσετε στις πιο κάτω περιπτώσεις, αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι **παράλληλες**, **ταυτίζονται** ή **τέμνονται**. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

α) $\varepsilon_1: \psi = 2\chi + 5$
 $\varepsilon_2: \psi = 3\chi + 7$

$\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα οι ευθείες τέμνονται.

β) $\varepsilon_1: 18\chi + 6\psi = 8$
 $\varepsilon_2: \psi = -3\chi + 7$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1: 18\chi + 6\psi = 8 &\Leftrightarrow 6\psi = -18\chi + 8 \\ &\Leftrightarrow \psi = \frac{-18\chi}{6} + \frac{8}{6} \\ &\Leftrightarrow \psi = -3\chi + \frac{4}{3} \\ &\text{άρα } \lambda_1 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3, \beta_1 = \frac{4}{3}, \beta_2 = 7 \\ \text{Παρατηρούμε ότι } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ και } \beta_1 \neq \beta_2 \\ \text{άρα οι ευθείες είναι παράλληλες} \\ \lambda_1 = \lambda_2 &\Leftrightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \\ \beta_1 \neq \beta_2 &\text{ Συνθήκη παραλληλίας} \end{aligned}$$

γ) $\varepsilon_1: \psi = 5\chi + 9$
 $\varepsilon_2: \psi = 4$

$\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = 0$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα οι ευθείες τέμνονται.

δ) $\varepsilon_1: 3\chi = 6\psi - 12$

$\varepsilon_2: 2\psi - \chi = 4$

$\varepsilon_2: 2\psi - \chi = 4 \Leftrightarrow 2\psi = \chi + 4$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{\chi}{2} + \frac{4}{2}$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}\chi + 2$

άρα $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\varepsilon_1: 3\chi = 6\psi - 12 \Leftrightarrow 6\psi = 3\chi + 12$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{3\chi}{6} + \frac{12}{6}$

$\Leftrightarrow \psi = \frac{1}{2}\chi + 2$

άρα $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \beta_1 = 2, \beta_2 = 2$

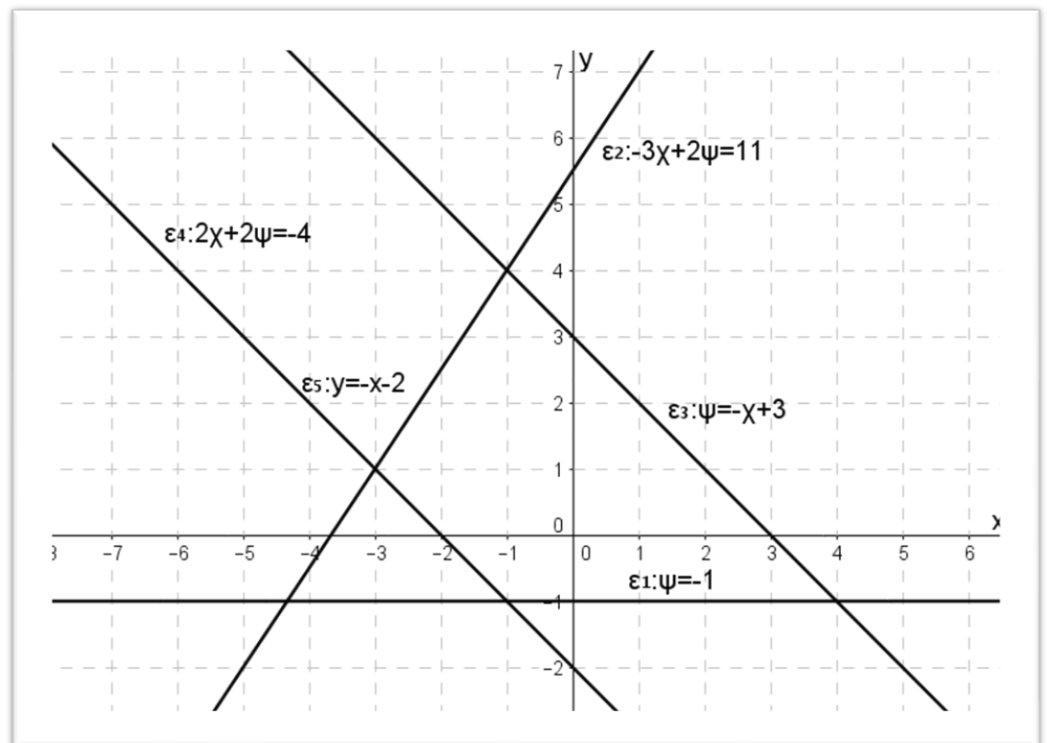
Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 = \beta_2$
 άρα οι ευθείες ταυτίζονται.

$\lambda_1 = \lambda_2$

$\Leftrightarrow \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$

$\beta_1 = \beta_2$

8. Χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, να εξετάσετε κατά πόσο τα ακόλουθα συστήματα έχουν μία λύση ή άπειρες λύσεις ή καμία λύση.
 (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



α) $\epsilon_3: \psi = -\chi + 3$ $\epsilon_2: -3\chi + 2\psi = 11$	β) $\epsilon_4: 2\chi + 2\psi = -4$ $\epsilon_5: \psi = -\chi - 2$	γ) $\epsilon_3: \psi = -\chi + 3$ $\epsilon_5: \psi = -\chi - 2$	δ) $\epsilon_3: \psi = -\chi + 3$ $\epsilon_1: \psi = -1$
Μία λύση (τέμνονται)	Άπειρες λύσεις (ταυτίζονται)	Καμία λύση (παράλληλες)	Μία λύση (τέμνονται)

9. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & x - y = 9 \\ & x + y = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + x &= 13 + 9 \\ \Leftrightarrow 2x &= 22 \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{2} &= \frac{22}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ \Leftrightarrow 11 + y &= 13 \\ \Leftrightarrow y &= 13 - 11 \\ \Leftrightarrow y &= 2 \end{aligned}$$

Λύση συστήματος: $(x, y) = (11, 2)$

$$\begin{aligned} \beta) \quad & 3x - y = 12 \Leftrightarrow y = 3x - 12 \\ & 2x + 3y = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 19 \\ \Leftrightarrow 2x + 3(3x - 12) &= 19 \\ \Leftrightarrow 2x + 9x - 36 &= 19 \\ \Leftrightarrow 2x + 9x &= 36 + 19 \\ \Leftrightarrow 11x &= 55 \\ \Leftrightarrow \frac{11x}{11} &= \frac{55}{11} \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 3x - 12 \\ \Leftrightarrow y &= 3 \cdot 5 - 12 \\ \Leftrightarrow y &= 15 - 12 \\ \Leftrightarrow y &= 3 \end{aligned}$$

Λύση συστήματος: $(x, y) = (5, 3)$

$$\begin{array}{l} \gamma) 2\alpha - 3\beta = -6 \\ \alpha - 2\beta = -5 \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cancel{2}\alpha - 3\beta = -6 \\ -\cancel{2}\alpha + 4\beta = 10 \\ \hline -3\beta + 4\beta = -6 + 10 \\ \Leftrightarrow \beta = 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \alpha - 2\beta = -5 &\Leftrightarrow \alpha - 2 \cdot 4 = -5 \\ &\Leftrightarrow \alpha - 8 = -5 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 8 - 5 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 3 \end{aligned}$$

Λύση συστήματος: $(\alpha, \beta) = (3, 4)$

$$\begin{array}{l} \delta) 3\varphi + 5\omega = 50 \\ 4\varphi + 3\omega = 41 \end{array} \left| \begin{array}{l} -4 \\ 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} -\cancel{12}\varphi - 20\omega = -200 \\ \cancel{12}\varphi + 9\omega = 123 \\ \hline -20\omega + 9\omega = -200 + 123 \\ \Leftrightarrow -11\omega = -77 \\ \Leftrightarrow \frac{-11\omega}{-11} = \frac{-77}{-11} \\ \Leftrightarrow \omega = 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3\varphi + 5\omega = 50 &\Leftrightarrow 3\varphi + 5 \cdot 7 = 50 \\ &\Leftrightarrow 3\varphi + 35 = 50 \\ &\Leftrightarrow 3\varphi = 50 - 35 \\ &\Leftrightarrow 3\varphi = 15 \\ &\Leftrightarrow \frac{3\varphi}{3} = \frac{15}{3} \\ &\Leftrightarrow \varphi = 5 \end{aligned}$$

Λύση συστήματος: $(\varphi, \omega) = (5, 7)$

$$\varepsilon) \frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{6x}{15} - \frac{5y}{15} = \frac{40}{15} \Leftrightarrow 6x - 5y = 40$$

$$x = 2(y + 1) \Leftrightarrow x = 2y + 2$$

$$6(2y + 2) - 5y = 40$$

$$\Leftrightarrow 12y + 12 - 5y = 40$$

$$\Leftrightarrow 12y - 5y = 40 - 12$$

$$\Leftrightarrow 7y = 28$$

$$\Leftrightarrow \frac{7y}{7} = \frac{28}{7}$$

$$\Leftrightarrow y = 4$$

$$x = 2y + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \cdot 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 8 + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 10$$

Λύση συστήματος: $(x, y) = (10, 4)$

10. Δίνεται η ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$. Να βρείτε τα λ και μ ώστε η ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(2, 5)$ και $(-1, -7)$.

Αντικαθιστούμε το σημείο $(2, 5)$ στην ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$

$$(\lambda + \mu) \cdot 2 + (2\mu - \lambda) \cdot 5 = 3 \Leftrightarrow 2\lambda + 2\mu + 10\mu - 5\lambda = 3$$

$$\Leftrightarrow -3\lambda + 12\mu = 3 \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε το σημείο $(-1, -7)$ στην ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$

$$(\lambda + \mu) \cdot (-1) + (2\mu - \lambda) \cdot (-7) = 3 \Leftrightarrow -\lambda - \mu - 14\mu + 7\lambda = 3$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda - 15\mu = 3 \quad (2)$$

Από (1) και (2),

$$\begin{array}{l|l} -3\lambda + 12\mu = 3 & 2 \\ 6\lambda - 15\mu = 3 & 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} -6\lambda + 24\mu = 6 \\ 6\lambda - 15\mu = 3 \\ \hline 24\mu - 15\mu = 6 + 3 \\ \Leftrightarrow 9\mu = 9 \\ \Leftrightarrow \frac{9\mu}{9} = \frac{9}{9} \\ \Leftrightarrow \mu = 1 \end{array}$$

$$6\lambda - 15\mu = 3 \Leftrightarrow 6\lambda - 15 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow 6\lambda - 15 = 3 \Leftrightarrow 6\lambda = 15 + 3 \Leftrightarrow 6\lambda = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\lambda}{6} = \frac{18}{6}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3$$

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (a + \beta)x + 2\alpha + \beta = 4$. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις τους αριθμούς 2 ή -3 .

$$\begin{aligned} \text{Αντικαθιστούμε όπου } x = 2 \text{ στην εξίσωση } x^2 + (a + \beta)x + 2\alpha + \beta = 4 \\ 2^2 + (a + \beta)2 + 2\alpha + \beta = 4 \Leftrightarrow 4 + 2a + 2\beta + 2\alpha + \beta = 4 \\ \Leftrightarrow 4\alpha + 3\beta = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αντικαθιστούμε όπου } x = -3 \text{ στην εξίσωση } x^2 + (a + \beta)x + 2\alpha + \beta = 4 \\ (-3)^2 + (a + \beta) \cdot (-3) + 2\alpha + \beta = 4 \Leftrightarrow 9 - 3a - 3\beta + 2\alpha + \beta = 4 \\ \Leftrightarrow -\alpha - 2\beta = 4 - 9 \\ \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 5 \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2),

$$\begin{array}{l} 4\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{array} \left[\begin{array}{l} 1 \\ -4 \end{array} \right] \begin{array}{l} 4\alpha + 3\beta = 0 \\ \underline{-4\alpha - 8\beta = -20} \\ 3\beta - 8\beta = -20 \\ \Leftrightarrow -5\beta = -20 \\ \Leftrightarrow \frac{-5\beta}{-5} = \frac{-20}{-5} \\ \Leftrightarrow \beta = 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta = 5 &\Leftrightarrow \alpha + 2 \cdot 4 = 5 \\ &\Leftrightarrow \alpha + 8 = 5 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 5 - 8 \\ &\Leftrightarrow \alpha = -3 \end{aligned}$$

Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με την χρήση συστήματος.

12. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες, να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

	Αριθμός σκηνών	Αριθμός ατόμων στις σκηνές
Σκηνές των 4	χ	4χ
Σκηνές των 6	ψ	6ψ

$$\chi + \psi = 50 \Leftrightarrow \chi = 50 - \psi$$

$$\begin{aligned} 4\chi + 6\psi &= 260 \Leftrightarrow 4(50 - \psi) + 6\psi = 260 \\ &\Leftrightarrow 200 - 4\psi + 6\psi = 260 \\ &\Leftrightarrow 2\psi = 260 - 200 \\ &\Leftrightarrow 2\psi = 60 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\psi}{2} = \frac{60}{2} \\ &\Leftrightarrow \psi = 15 \end{aligned}$$

$$\chi = 50 - \psi \Leftrightarrow \chi = 50 - 15 = 35$$

Απάντηση: 35 σκηνές των 4 ατόμων και 15 σκηνές των 6 ατόμων.

13. Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών, δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα του ενός ευρώ και πόσα των δύο ευρώ δέχεται ο κερματοδέκτης.

	Αριθμός κερμάτων	Αξία κερμάτων
Κέρμα €1	χ	1χ
Κέρμα €2	ψ	2ψ

$$\chi + \psi = 80 \Leftrightarrow \chi = 80 - \psi$$

$$\begin{aligned} \chi + 2\psi &= 95 \Leftrightarrow 80 - \psi + 2\psi = 95 \\ &\Leftrightarrow \psi = 95 - 80 \\ &\Leftrightarrow \psi = 15 \end{aligned}$$

$$\chi = 80 - \psi \Leftrightarrow \chi = 80 - 15 = 65$$

Απάντηση: 65 κέρματα του €1 και

15 κέρματα των €2.

14 . Στη χορωδία ενός σχολείου συμμετέχουν 52 μαθητές και μαθήτριες. Αν οι μαθήτριες είναι 10 περισσότερες από το διπλάσιο των μαθητών, να βρείτε πόσοι μαθητές και πόσες μαθήτριες συμμετέχουν στη χορωδία του σχολείου.

Αριθμός μαθητών: χ

Αριθμός μαθητριών: ψ

52 μαθητές και μαθήτριες: $\chi + \psi = 52$

οι μαθήτριες είναι 10 περισσότερες από το διπλάσιο των μαθητών: $\psi = 2\chi + 10$

$$\psi = 2\chi + 10$$

$$\chi + \psi = 52 \Leftrightarrow \chi + (2\chi + 10) = 52$$

$$\Leftrightarrow 3\chi + 10 = 52$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 52 - 10$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 42$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} = \frac{42}{3}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 14$$

$$\psi = 2\chi + 10 \Leftrightarrow \psi = 2 \cdot 14 + 10$$

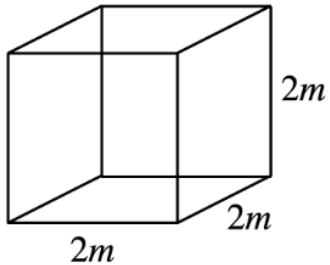
$$\Leftrightarrow \psi = 28 + 10$$

$$\Leftrightarrow \psi = 38$$

Απάντηση: Στη χορωδία του σχολείου συμμετέχουν 14 μαθητές και 38 μαθήτριες.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: Στερεομετρία

(1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή 2m.

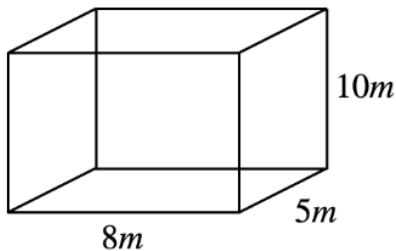


$$\begin{aligned}
 E_{ολ} &= \Pi_{\beta} \cdot v + 2E_{\beta} & V &= E_{\beta} \cdot v \\
 &= 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 & &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\
 &= 16 + 8 = 24m^2 & &= 8m^3
 \end{aligned}$$

ή

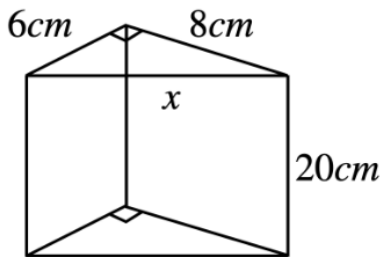
$$\begin{aligned}
 E_{ολ} &= 6a^2 & \text{Και} & & V &= a^3 \\
 &= 6 \cdot 2^2 & & & &= 2^3 \\
 &= 24m^2 & & & &= 8m^3
 \end{aligned}$$

(2) Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου είναι 5 m, 8 m και 10 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.



$$\begin{aligned}
 E_{ολ} &= E_{\pi} + 2E_{\beta} & V &= E_{\beta} \cdot v \\
 &= \Pi_{\beta} \cdot v + 2 \cdot 5 \cdot 8 & &= 8 \cdot 5 \cdot 10 \\
 &= 2(8 + 5) \cdot 10 + 80 & &= 400m^3 \\
 &= 260 + 80 & & \\
 &= 340m^2 & &
 \end{aligned}$$

(3) Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm . Αν το ύψος του πρίσματος είναι 20 cm να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.

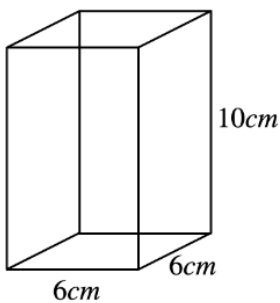


$$\begin{aligned}
 E_{ολ} &= E_{\pi} + 2E_{\beta} & V &= E_{\beta} \cdot v \\
 &= \Pi_{\beta} \cdot v + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} & &= \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 20 \\
 &= (6 + 8 + 10) \cdot 20 + 48 & &= 480cm^3 \\
 &= 480 + 48 & & \\
 &= 528cm^2 & &
 \end{aligned}$$

Π.Θ. στην βάση του τριγώνου:

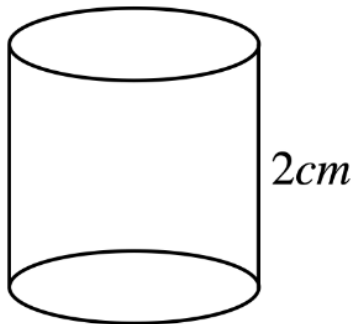
$$\begin{aligned}
 x^2 &= 8^2 + 6^2 \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 64 + 36 \\
 \Leftrightarrow x^2 &= 100 \\
 \Leftrightarrow x &= 10cm
 \end{aligned}$$

(4) Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 6 cm. Το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και τον όγκο του.



$$\begin{aligned}
 E_{ολ} &= E_{\pi} + 2E_{\beta} & V &= E_{\beta} \cdot v \\
 &= \Pi_{\beta} \cdot v + 2E_{\beta} & &= 6^2 \cdot 10 \\
 &= 4 \cdot 6 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 6 & &= 360cm^3 \\
 &= 240 + 72 & & \\
 &= 312cm^2 & &
 \end{aligned}$$

(5) Κύλινδρος έχει όγκο $50\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 2 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.



$$V = 50\pi \text{ cm}^3$$

$$V = E_{\beta} \cdot v$$

$$\Leftrightarrow 50\pi = \pi R^2 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow R = 5 \text{ cm}$$

$$E_{ολ} = E_{\kappa} + 2E_{\beta}$$

$$= \Pi_{\beta} \cdot v + 2E_{\beta}$$

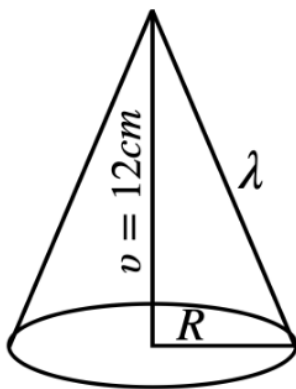
$$= 2\pi Rv + 2\pi R^2$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2$$

$$= 20\pi + 50\pi$$

$$= 70\pi \text{ cm}^2$$

(6) Το μήκος της βάσης κώνου είναι $10\pi \text{ cm}$ και το ύψος του 12 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδό της κυρτής του επιφάνειας.



$$\Pi_{\beta} = 10\pi \text{ cm}$$

$$\Pi_{\beta} = 2\pi R$$

$$\Leftrightarrow 10\pi = 2\pi R$$

$$\Leftrightarrow R = 5 \text{ cm}$$

Π.Θ. στο τρίγωνο:

$$\lambda^2 = v^2 + R^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 12^2 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 144 + 25$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 169$$

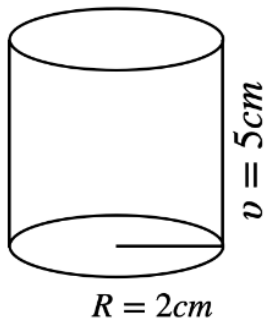
$$\Leftrightarrow \lambda = 13 \text{ cm}$$

$$E_{\kappa} = \pi R \lambda$$

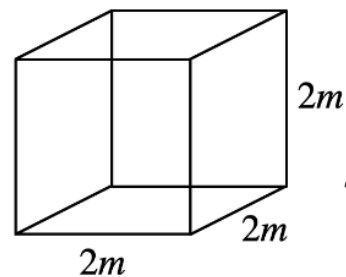
$$= \pi \cdot 5 \cdot 13$$

$$= 65\pi \text{ cm}^2$$

(7) Η Γεωργία έχει 20 κυλινδρικά κεριά ύψους 5 cm με ακτίνα βάσης 2 cm . Πρόκειται να τα λιώσει για να κατασκευάσει κεριά σχήματος κύβου ακμής 2 cm . Πόσα κεριά που θα έχουν σχήμα κύβου θα κατασκευάσει, αν δεν έχει απώλεια πρώτης ύλης ;



20 κεριά



?? κεριά

$$V_{\text{κυλ.}} = E_{\beta} \cdot v$$

$$= \pi R^2 v$$

$$= \pi \cdot 2^2 \cdot 5$$

$$= 20\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{κεριου}} = 20\pi \cdot 20$$

$$= 400\pi \text{ cm}^3$$

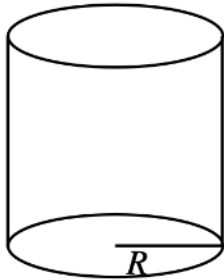
$$= 1256 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{κυβ.}} = 2^3$$

$$= 8 \text{ cm}^3$$

$$\text{Πλήθος κυβικών κεριών} = \frac{V_{\text{κεριου}}}{V_{\text{κυβ.}}} = \frac{1256}{8} = 157 \text{ κεριά.}$$

(8) Κύλινδρος έχει εμβαδό βάσης $16\pi \text{ cm}^2$ και εμβαδό ολικής επιφάνειας $80\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του.



$$E_{\beta} = 16\pi \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} E_{\beta} &= \pi R^2 \\ \Leftrightarrow 16\pi &= \pi R^2 \\ \Leftrightarrow R &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

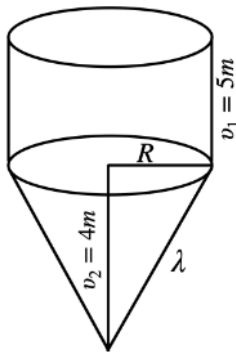
$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_{\kappa} + 2E_{\beta} \\ \Leftrightarrow 80\pi &= \Pi_{\beta} \cdot v + 2 \cdot 16\pi \\ \Leftrightarrow 80\pi &= 2\pi Rv + 32\pi \\ \Leftrightarrow 48\pi &= 2\pi 4v \\ \Leftrightarrow v &= \frac{48}{8} \\ \Leftrightarrow v &= 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\kappaυλ.} &= E_{\beta} \cdot v \\ &= \pi R^2 v \\ &= \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \\ &= \pi \cdot 16 \cdot 6 \\ &= 96\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

(9) Το διπλανό στερεό είναι αποθήκη σιτηρών, ανοικτή από πάνω και φτιαγμένη από λαμαρίνα κόστους 20€ το m^2 . Το ύψος του κυλίνδρου είναι 5 m και το ύψος του κώνου είναι 4 m.

α) Αν ο όγκος του στερεού είναι $57\pi \text{ m}^3$, να βρείτε το κόστος κατασκευής του.

β) Αν το στερεό είναι γεμάτο με σιτάρι και θα το μεταφέρουμε με φορτηγό σε άλλη αποθήκη, να υπολογίσετε πόσες διαδρομές θα κάνει το φορτηγό, του οποίου η καρότσα είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 5m, 3m και 1,8m.



$$20\text{€} / \text{m}^2$$

(α) $V = 57\pi \text{ m}^3$ κόστος κατασκευής=?

(β) Πλήθος διαδρομών = ?

$$\begin{aligned} E_{ολ} &= E_{\kappa.κυλ} + E_{\kappa.κων} \\ &= \Pi_{\beta} \cdot v_1 + \pi R \lambda \\ &= 2\pi R 5 + \pi R \lambda \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 30\pi + 15\pi \\ &= 45\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ολ} &= V_{\kappaυλ} + V_{\kappaων} \\ \Leftrightarrow 57\pi &= E_{\beta} \cdot v_1 + \frac{1}{3} E_{\beta} \cdot v_2 \\ \Leftrightarrow 57\pi &= \pi R^2 \cdot 5 + \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow 57 &= 5R^2 + \frac{4}{3} R^2 \end{aligned}$$

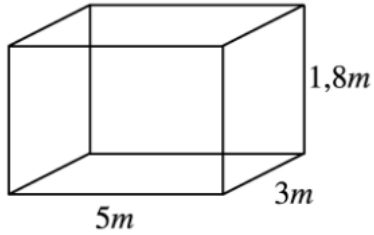
Π.Θ. στο τρίγωνο:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= R^2 + v_2^2 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 9 + 16 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$K = E_{ολ} \cdot \frac{20 \text{ ευρώ}}{m^2}$$

$$= 45\pi \text{ m}^2 \cdot \frac{20 \text{ ευρώ}}{m^2}$$

$$= 900\pi \text{ ευρώ}$$



$$\Leftrightarrow 171 = 15R^2 + 4R^2$$

$$\Leftrightarrow 19R^2 = 171$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 9$$

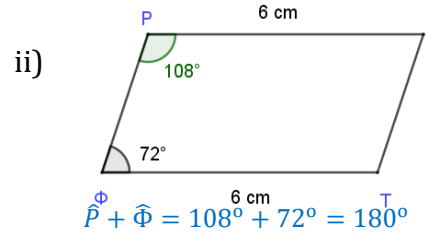
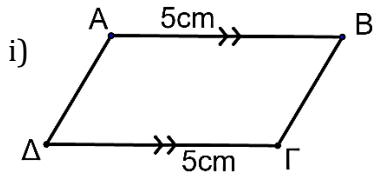
$$\Leftrightarrow R = 3m$$

$$\text{Διαδρομές} = \frac{V}{V_{παρ.}} = \frac{57\pi m^3}{5 \cdot 3 \cdot 1,8m^3} = \frac{178.98m^3}{27m^3} = 6.63$$

Άρα θα χρειαστεί να κάνει 7 διαδρομές.

ΕΝΟΤΗΤΑ 10: Παραλληλόγραμμα και τραπέζια

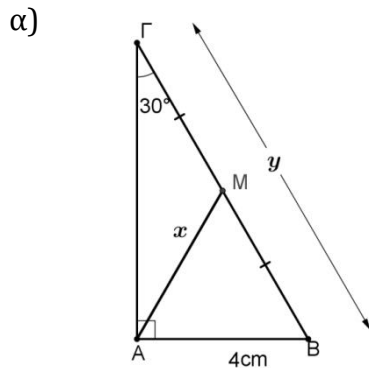
1. Να γράψετε το είδος των πιο κάτω τετράπλευρων (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



$AB \parallel \Delta\Gamma$. Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο (δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες)

Αφού $\hat{P}, \hat{\Phi}$ παραπληρωματικές και είναι σε θέση εντός επί τα αυτά τότε $P\Sigma \parallel \Phi T$.
Επίσης $P\Sigma = \Phi T$. Άρα το $P\Sigma T\Phi$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

2. Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τις τιμές των x και y σε κάθε περίπτωση και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

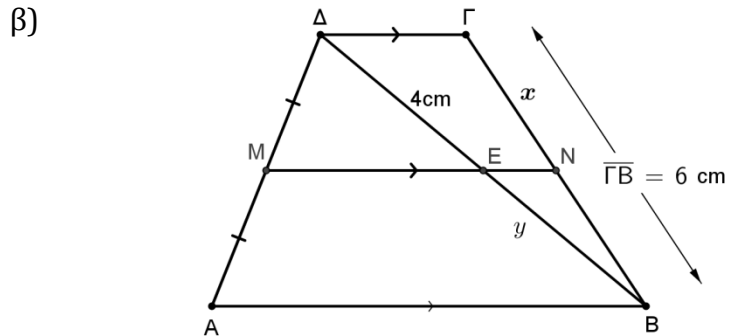


$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{\Gamma} = 30^\circ \end{array} \right\} AB = \frac{B\Gamma}{2}$$

$$B\Gamma = 2 \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8\text{cm}$$

$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$AM \text{ διάμεσος, } \text{άρα } AM = \frac{B\Gamma}{2} = 4\text{cm}$$

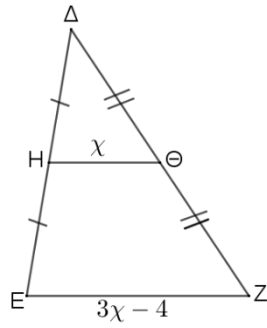


$$\left. \begin{array}{l} \Delta\Gamma \parallel MN \parallel AB \\ \Delta M = MA \end{array} \right\} \Delta E = EB \text{ και } \Gamma N = NB$$

$$y = 4\text{cm}$$

$$x = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$$

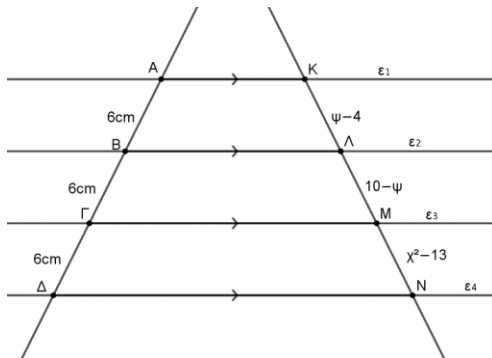
γ)



H μέσον ΔE
 Θ μέσον ΔZ

$$H\Theta = \frac{EZ}{2} \Rightarrow x = \frac{3x-4}{2} \Rightarrow 2x = 3x - 4 \Rightarrow x = 4$$

δ)



$AK \parallel BL \parallel \Gamma M$
 $AB = B\Gamma$

$$KL = LM$$

$$\psi - 4 = 10 - \psi$$

$$\Leftrightarrow \psi = 7$$

$BL \parallel \Gamma M \parallel \Delta N$
 $B\Gamma = \Gamma\Delta$

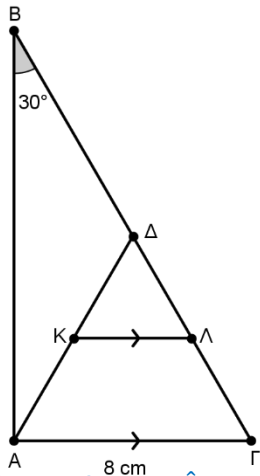
$$LM = MN$$

$$10 - 7 = x^2 - 13$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \Rightarrow x = 4 \text{ δεκτή}$$

3. Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ και το σημείο Κ το μέσο της ΑΔ. Αν ΚΛ // ΑΓ, $\hat{B} = 30^\circ$ και ΑΓ = 8 cm .Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ, ΑΔ και ΚΛ. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



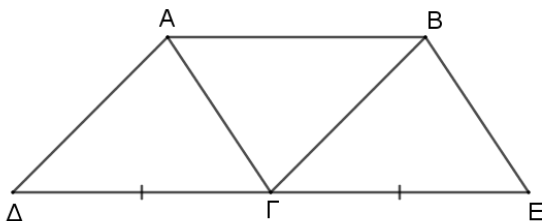
$$\left. \begin{array}{l} ABG \text{ ορθογώνιο τρίγωνο } (\hat{A} = 90^\circ) \\ \hat{B} = 30^\circ \end{array} \right\} \Leftrightarrow AG = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow 8 = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow BG = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow BG = 16 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} ABG \text{ ορθογώνιο τρίγωνο } (\hat{A} = 90^\circ) \\ AD \text{ διάμεσος αφού } \Delta \text{ μέσο } BG \end{array} \right\} \Leftrightarrow AD = \frac{BG}{2} \Leftrightarrow AD = \frac{16}{2} \Leftrightarrow AD = 8 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{array}{l} K \text{ μέσο } AD \\ KL // AG \end{array} \right\} \Leftrightarrow L \text{ μέσο } \Delta G$$

$$\left. \begin{array}{l} K \text{ μέσο } AD \\ L \text{ μέσο } \Delta G \end{array} \right\} \Leftrightarrow KL // \frac{AG}{2} \Leftrightarrow KL = \frac{8}{2} \Leftrightarrow KL = 4 \text{ cm}$$

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προεκτείνετε τη ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΔΓ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΒΕΓ παραλληλόγραμμο.



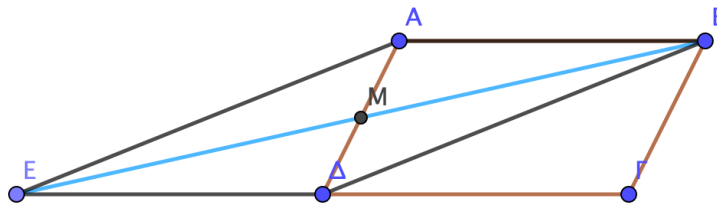
$$\left. \begin{array}{l} AB // \Delta G \text{ (} ABG\Delta \text{ παραλληλόγραμμο)} \\ \Gamma E \text{ πρόεκταση της } \Delta G \end{array} \right\} \Leftrightarrow AB // \Gamma E$$

1

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} AB = AG \text{ (πλευρές παραλληλογράμμου)} \\ \Delta\Gamma = \Gamma E \text{ (δεδομένα)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow AB = \Gamma E$$

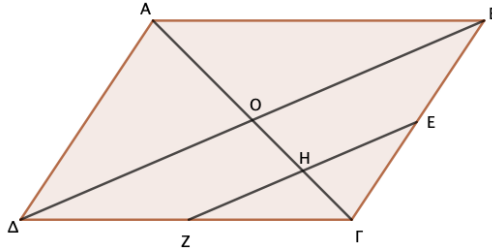
Από $\textcircled{1}$ και $\textcircled{2} \Leftrightarrow AB \parallel \Gamma E \Leftrightarrow AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

5. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, M είναι το μέσο της $A\Delta$. Φέρουμε την BM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $BM=ME$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.



$$\left. \begin{array}{l} AM = M\Delta \text{ (M μέσο } A\Delta) \\ BM = ME \text{ (δεδομένο)} \end{array} \right\} \Rightarrow AB\Delta E \text{ παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιοι του διχοτομούνται}$$

6. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να δείξετε ότι $GH = \frac{AG}{4}$.



Κατασκευάζω την διαγώνιο ΒΔ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ζ μέσο ΔΓ} \\ \text{Ε μέσο ΒΓ} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΖΕ} \parallel \frac{\text{ΔΒ}}{2} \Rightarrow \text{ΗΕ} \parallel \text{ΒΟ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ΗΕ} \parallel \text{ΒΟ} \\ \text{Ε μέσο ΒΓ} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Η μέσο ΟΓ}$$

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο \Rightarrow ΑΟ= ΟΓ (διαγώνιοι διχοτομούνται)

$$\Rightarrow \text{ΟΓ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$$

$$\text{Η μέσο ΟΓ} \Rightarrow \text{GH} = \frac{\text{ΟΓ}}{2} = \frac{\frac{\text{ΑΓ}}{2}}{2} = \frac{\text{ΑΓ}}{4}$$

